

Ejercicios de Álgebra Lineal

61. Demostrar que $\{(2, 1, 1)^t, (-2, 1, 3)^t, (1, 3, 1)^t\}$ es una base de \mathbb{Q}^3 y dar las coordenadas de $(1, 1, 1)^t$ en dicha base. Hallar la matriz del cambio de base respecto a la canónica.
62. Demostrar que $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$ (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la indeterminada x con coeficientes reales). Probar que $\{(1+x)^3, x(1+x)^2, x^2(1+x), x^3\}$ es otra base de $\mathbb{R}_3[x]$ y hallar respecto a esta segunda base las coordenadas de los elementos de la primera. Hallar la matriz del cambio de base.
63. Dados los conjuntos de vectores $\mathcal{B} = \{(3, 2, 5)^t, (2, 1, 3)^t, (1, 0, 2)^t\}$ y $\mathcal{B}' = \{(-2, 1, 3)^t, (-2, 1, 2)^t, (1, -1, 3)^t\}$:
- Demostrar que son bases de \mathbb{Q}^3 y hallar las matrices del cambio de base en los dos sentidos.
 - Hallar las coordenadas de $v = (2, -1, -4)^t_{\mathcal{B}}$ en la base \mathcal{B}' .
 - Hallar las coordenadas de $w = (0, 1, 5)^t_{\mathcal{B}'}$ en la base \mathcal{B} .
 - Escribir las coordenadas de v y w en la base canónica.
64. Sean U, W subespacios de \mathbb{Q}^3 definidos por $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{Q}^3 \mid x = y = z\}$ y $W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{Q}^3 \mid x = 0\}$.
- Hallar una base de U y otra de W .
 - Comprobar que $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$.
65. Probar que $H = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 \mid x + y = z - y = 0\}$ es subespacio vectorial de \mathbb{K}^4 . Encontrar una base de H y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de \mathbb{K}^4 .
66. a) Demostrar que si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V , entonces $V = L(v_1) \oplus \dots \oplus L(v_n)$.
- b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\} \cup \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces $V = V_1 \oplus V_2$, donde $V_1 = L(v_1, \dots, v_r)$ y $V_2 = L(v_{r+1}, \dots, v_n)$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

69. Sean los subespacios $U = L((1, 3, -2, 2, 3)^t, (1, 4, -3, 4, 2)^t, (2, 3, -1, -2, 9)^t)$ y $W = L((1, 3, 0, 2, 1)^t, (1, 5, -6, 6, 3)^t, (2, 5, 3, 2, 1)^t)$ de \mathbb{Q}^5 . Hallar una base y la dimensión de $U \cap W$.
70. Dados los subespacios de \mathbb{Q}^4 , $U = L((1, 2, 1, 3)^t, (0, 1, 2, 1)^t, (6, 11, 4, 17)^t)$ y $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de $U + W$ y de $U \cap W$. ¿Es $U + W$ una suma directa?
71. Sean $n > 2$ un entero y U y W dos subespacios de dimensión $n - 1$, distintos entre sí, de un espacio vectorial V de dimensión n .
- Probar que todo vector de V es suma de uno de U y otro de W .
 - Calcular la dimensión de $U \cap W$.
72. Sean a y b números reales y consideremos los subespacios U y W de \mathbb{Q}^4 cuyas ecuaciones implícitas son
- $$U : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
- Calcular la dimensión de U y W . ¿Existen valores de a y b para los que $U = W$?
 - ¿Cómo han de ser a y b para que $U + W \neq \mathbb{Q}^4$?
73. Dado el subespacio vectorial $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{Q}^4$, hallar una base de W . Determinar si $(1, -2, 0, 1)^t \in W$ y, en ese caso, hallar sus coordenadas respecto a dicha base de W .
74. Sea $H \subset \mathbb{Q}^4$ el subespacio definido como $H = \{x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0\}$. Hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio $L \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = L \oplus H$.
75. Sean $H = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{Q}^4 \mid x - y = z + t = 0\}$ y $M = L((2, 1, 1, 1)^t, (0, 1, -1, -1)^t, (1, 0, 1, 1)^t)$ subespacios de \mathbb{Q}^4 .
- Hallar una base de H y las ecuaciones implícitas de M .
 - Hallar $H \cap M$ y $H + M$. ¿Es $H + M$ suma directa?
 - Si $U = L((0, 2, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t)$ hallar $H + U$ y $M + U$. ¿Se trata de sumas directas?
76. Sean $V = \mathbb{Q}^5$ y $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t \in \mathbb{Q}^5 \mid x_4 = x_5 = 0\}$. ¿Cuáles son los elementos de V/W ? Hallar una base y la dimensión de V/W .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

79. Dado el endomorfismo f de \mathbb{Q}^3 definido por $x'_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $x'_2 = x_1 - x_2 + x_3$, $x'_3 = x_1 + x_3$, hallar la matriz de f y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen.
80. Dado el endomorfismo f de \mathbb{Q}^3 definido por $x'_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $x'_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$, $x'_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3$, hallar la matriz de f y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70