

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**  
**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**Análisis de Variable Real. Curso 15–16.**  
**Los números reales y la propiedad de supremo. Hoja 2**

**26** Probar que si  $A \subset \mathbb{R}$  es acotado superiormente, entonces  $\alpha = \sup(A)$  se caracteriza por que

i)  $\alpha$  es una cota superior de  $A$

ii) Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .

Enunciar y demostrar una propiedad análoga para el ínfimo de un conjunto.

**27** Supongamos que  $E \subset F \subset \mathbb{R}$  y  $E \neq \emptyset$ .

i) Probar que si  $F$  es acotado superiormente, entonces  $E$  también lo es y que  $\sup(E) \leq \sup(F)$ .

ii) Probar que si  $F$  es acotado inferiormente, entonces  $E$  también lo es y que  $\inf(F) \leq \inf(E)$ .

**28** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  y no vacíos y acotados superiormente. Probar que

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$$

$$\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$$

y con un ejemplo muestra que en general no se da “=”. Demostrar algo semejante para el ínfimo.

**29** i) Probar que todo conjunto finito de  $\mathbb{R}$  contiene a su supremo y a su ínfimo.

ii) Probar que si una cota superior pertenece al conjunto entonces esa cota es el supremo. Demostrar algo semejante para el ínfimo.

**Notación:** Cuando el supremo (o el ínfimo) de un conjunto, pertenece al conjunto, se llama **máximo** del conjunto (respectivamente, **mínimo**).

**30** Demostrar que si  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  entonces el ínfimo de este conjunto es 0 y deducir que si  $|a - b| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces  $a = b$ .

**31** i) Probar que  $\inf\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = 0$  y que por tanto para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon).$$

**Indicación:** Usar que  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

ii) Probar lo mismo para  $\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\}$  con  $x > 0$ .

iii) Si  $x < 0$ , probar que  $\sup\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\} = 0$  y que por tanto para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{x}{n} \in (-\varepsilon, 0).$$

iv) Probar que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

**32** Demostrar que si  $a, x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ , verifican

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nx, (n+1)x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nx, (n+1)x]$$

**34** Sean  $x$  e  $y$  números reales tales que  $x > 1$ ,  $y > 0$ .

i) Demostrar que existe un número  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$y < x^n$$

**Indicación:** Para  $y < 1$  o  $y = 1$  es fácil. Si  $y > 1$  argumentar por reducción al absurdo. En este caso utiliza que si  $0 < \varepsilon < x - 1$  entonces para todo  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ .

ii) Concluye la **Propiedad Arquimediana del producto**: existe un único  $p \in \mathbb{Z}$  tal que

$$x^{p-1} \leq y < x^p \quad (\text{ó } x^{p-1} < y \leq x^p)$$

**Indicación:** Para  $y = 1$  es fácil. Para  $y > 1$ , usando i), considera el conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N}, y < x^n\}$  y usa el Buen Orden de  $\mathbb{N}$ . Para  $0 < y < 1$  redúcelo al caso anterior.

iii) Concluye que

$$(0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [x^{p-1}, x^p)$$

(unión disjunta dos a dos).

Modifica ligeramente los argumentos anteriores para probar que

$$(0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (x^{p-1}, x^p]$$

(unión disjunta dos a dos).

**35** i) Se llama suma aritmética de dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}$  al conjunto

$$A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}.$$

Demostrar que si  $A$  y  $B$  están acotados superiormente entonces  $A + B$  también y se tiene

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.

ii) Se llama producto aritmético de dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}$  al conjunto

$$A \cdot B = \{xy, x \in A, y \in B\}.$$

Demostrar que si  $A$  y  $B$  están acotados superiormente y compuestos de números positivos, entonces  $A \cdot B$  también y se tiene

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \sup(B).$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.

iii) Se llama potencia aritmética del conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  al conjunto  $A^n = \{x^n, x \in A\}$ , con  $n \in \mathbb{N}$  fijo. ¿Es  $A^2$  igual a  $A \cdot A$ ?

Demostrar que si  $A$  es un conjunto acotado superiormente y compuesto de números positivos, entonces  $A^2 = A \cdot A$ .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Concluir que de hecho hay infinitos números como  $r_1$  y  $r_2$ . Hacer lo mismo para números irracionales.

Concluir que en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  no hay un "número siguiente" ni un "número anterior" a un número

**37** Sea  $n \in \mathbb{N}$ .

i) Si  $n$  es par y  $a > 0$  probar que entonces  $a$  tiene exactamente dos raíces  $n$ -ésimas reales, una opuesta de la otra, que representamos por  $\pm \sqrt[n]{a}$ . Si además  $0 \leq a_1 < a_2$  entonces  $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$ . Si  $a < 0$  entonces no tiene raíces  $n$ -ésimas reales.

ii) Si  $n$  es impar y  $a \in \mathbb{R}$  probar que  $a$  tiene exactamente una raíz  $n$ -ésima real, con el mismo signo que  $a$ . Si además  $a_1 < a_2$  entonces  $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$ .

### 38 Exponentes enteros y racionales

i) Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , y  $m \in \mathbb{N}$  definimos

$$a^m = \underbrace{a \cdots a}_m, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

Probar que  $a^n a^m = a^{n+m}$  para todos  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $(a^n)^m = a^{nm}$  para todos  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $(ab)^m = a^m b^m$  para todos  $a, b \neq 0$  y  $m \in \mathbb{Z}$ .

ii) Si  $a > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ . Probar que la definición de  $a^{\frac{m}{n}}$  es consistente para todas las fracciones que representan al mismo número racional y por tanto  $a^r$  está bien definido para  $r \in \mathbb{Q}$ .

Probar que  $a^r a^s = a^{r+s}$  para todos  $r, s \in \mathbb{Q}$  y  $a^0 = 1$ . Probar que  $(ab)^r = a^r b^r$  para todos  $a, b \neq 0$  y  $r \in \mathbb{Q}$ . Probar que  $(a^r)^s = a^{rs}$  para todos  $r, s \in \mathbb{Q}$ .

iii) Si  $0 < a < 1$ , probar que si  $r < s$  entonces  $a^r > a^s$  mientras que si  $a > 1$  y  $r < s$  entonces  $a^r < a^s$  para todos  $r, s \in \mathbb{Q}$ .

### 39 La exponencial real

Probar que si  $x \in \mathbb{R}$  y llamamos  $I_x = \{r \in \mathbb{Q}, r < x\}$  y  $S_x = \{r \in \mathbb{Q}, r > x\}$  entonces estos conjuntos son no vacíos y

$$x = \sup I_x = \inf S_x.$$

Concluir que si  $a > 1$  y definimos

$$a^x = \sup\{a^r, r \in I_x\}$$

entonces  $a^x = \inf\{a^r, r \in S_x\}$  y se tiene  $a^x a^y = a^{x+y}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $a^0 = 1$  y si  $x < y$  entonces  $a^x < a^y$ . Probar que  $(a^x)^y = a^{xy}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  y que  $(ab)^x = a^x b^x$  para toda  $a, b > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

Si  $0 < a < 1$  obtener un resultado semejante definiendo

$$a^x = \inf\{a^r, r \in I_x\}.$$

Prueba que es este caso  $a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}$ .

**40** Probar que si  $A, B \subset \mathbb{R}$  son no vacíos y tales que  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $a < b$  para todos  $a \in A$ ,  $b \in B$ , entonces existe un único número real  $\gamma$  tal que  $a \leq \gamma \leq b$  para todos  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

**41** Determinar los conjuntos

i)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ , ii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$  iii)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$ , iv)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$ ,

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

iii) Probar con un ejemplo que si  $\alpha = \sup_n a_n$ ,  $\beta = \inf_n b_n$ , en general no es cierto que  $\bigcap_n (a_n, b_n) = (\alpha, \beta)$  aunque  $(a_n, b_n) \subset (a, b)$ .