Problemas de Álgebra Lineal

Curso 2015-2016

Preparados por los profesores de la asignatura:

Gabriel Asensio Madrid
Mercedes Bermejo Solera
Daniel Jeremy Forrest Fox
Pedro María González Manchón
José Manuel Poncela Pardo
Jesús San Martín Moreno
José María Sierra Carrizo
Dolores Sotelo Herrera
María del Carmen Tobar Puente
Isaías Uña Juárez

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Temario

1. Cálculo matricial.

   1.1 Álgebra matricial.

   1.2 Sistemas de ecuaciones. Reducción de Gauss.

   1.3 Determinantes.

2. Espacios vectoriales y aplicaciones lineales.

   2.1 Dependencia e independencia lineal.

   2.2 Subespacios vectoriales.

   2.3 Bases de un espacio vectorial. Dimensión.

   2.4 Coordenadas en una base. Cambio de base.

   2.5 Definición y propiedades de las aplicaciones lineales.

   2.6 Aplicaciones lineales y matrices.

3. Semejanza y diagonalización de matrices.

   3.1 Semejanza de matrices.

   3.2 Autovalores y autovectores.

   3.3 Forma canónica de Jordan.

   3.4 Aplicaciones.

4. Espacios vectoriales euclídeos.

   4.1 Formas cuadráticas. Productos escalares. Ortogonalidad.

   4.2 Proyecciones. Mínimos cuadrados.

   4.3 Diagonalización ortogonal.

   4.4 Transformaciones ortogonales.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

<u>**Notación**</u>

Matrices
Se denotan con letras mayúsculas A, B, M, etc. La traspuesta de A es A^t. El determinante de A se escribe indistintamente $|A|$ o $\det(A)$.

I, I_n son matrices identidad.
$\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_{n\times k}$ son matrices nulas.

En un par de problemas aparece la notación $I_{n,k}$ para referirnos a una matriz nula excepto por tener unos en la diagonal k-ésima (la diagonal 1 es la diagonal principal, así que $I_{3,1} = I_3$). Esta notación es útil para trabajar con las *cajitas* de Jordan. Por ejemplo, la cajita de Jordan de orden cinco asociada al autovalor 7 es $J = 7I_5 + I_{5,2}$.

Bases
Aparecen en letra caligráfica $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc. Una base de Jordan se escribe normalmente $\mathcal{J}$.

Para mantener cierta tradición, los enunciados mantienen la terminología base *canónica* de $\mathbb{R}^3$ para referirse a la base estándar $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Lo mismo se aplica a cualquier $\mathbb{R}^n$.

Espacios vectoriales
Se denotan con letras mayúsculas E, F, G, etc. Ejemplos que aparecen:

- $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ y en general $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ para referirnos a los polinomios de grado menor o igual que n, con coeficientes reales, en la indeterminada x. Por ejemplo, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.
- $\mathcal{M}_{n\times k}$ es el conjunto de matrices reales con n filas y k columnas. Ponemos $\mathcal{M}_n$ en vez de $\mathcal{M}_{n\times n}$.
- $\mathcal{S}_n$ es el subespacio de $\mathcal{M}_n$ formado por las matrices simétricas. $\mathcal{A}_n$ es el subespacio de $\mathcal{M}_n$ formado por las matrices antisimétricas. Por ejemplo, escribimos $\mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

El subespacio vectorial generado por los vectores $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ se denota por $\mathcal{L}\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$. La letra caligráfica $\mathcal{L}$ se refiere al término *lineal*.

La intersección de subespacios V y W se denota por $V \cap W$. Su suma por $V + W$. Si $V \cap W = \{\bar{0}\}$, la suma $V + W$ se escribe $V \oplus W$. En este caso hablamos de la suma directa de V y W, y decimos que V y W son suplementarios.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

natural, pero λ no tiene que serlo. Por ejemplo, el espacio invariante de orden 3 del autovalor 5 es

$$N_3(5) = \ker(f - 5\,\mathrm{id}_E)^3$$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

En general escribimos un vector con una barra encima. Por ejemplo $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{e}$, $\bar{x}$, etc.

Siempre hablamos de ecuaciones paramétricas o implícitas *referidas a una base*. Si esta base no se menciona explícitamente, será porque estemos trabajando en $\mathbb{R}^n$ y sobreentendiendo la base canónica.

Aplicaciones lineales
Se denotan con letras minúsculas f, g, h, etc. Por ejemplo, una proyección es p, y no P.

El endomorfismo identidad de E aparece como id_E. Así que $\mathrm{id}_E(\bar{u}) = \bar{u}$ para todo vector $\bar{u} \in E$.

Si el espacio de llegada de f coincide con el espacio de salida de g, podemos considerar la composición h de f con g, escrita $h = g \circ f$. Por definición, $h(\bar{u}) = g(f(\bar{u}))$.

Un endomorfismo f puede componerse consigo mismo las veces que se desee. Escribimos entonces $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ (f \circ f)$, etc. La asociatividad de la composición permite prescindir de los paréntesis.

Matriz del cambio de base
Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos bases de E, denotamos por $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base que multiplicada por las coordenadas en A da las coordenadas en $\mathcal{B}$.

Matriz de una aplicación lineal
Las siguientes notaciones se utilizan en los problemas, pero (casi) siempre con la debida explicación:

Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal, $\mathcal{A}$ una base de E y $\mathcal{B}$ una base de F, la matriz de f en estas bases se denota por $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

Si $F = E$ y $f = \mathrm{id}_E$, entonces la matriz $M_{\mathrm{id}_E,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Es decir,

$$M_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = M_{\mathrm{id}_E,\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

Si f es endomorfismo de E y se considera la misma base $\mathcal{A}$ en la salida y en la llegada, abreviamos $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ escribiendo $M_{f,\mathcal{A}}$.

Si se trabaja con un único endomorfismo f de E (lo que es norma común en los problemas), resulta muy cómodo usar la letra A para la matriz de f en la base $\mathcal{A}$, la letra B para la matriz de f en la base $\mathcal{B}$, etc. Es decir, $A = M_{f,\mathcal{A}}$, $B = M_{f,\mathcal{B}}$, etc.

Si uno es coherente con la notación anterior, encuentra natural escribir que la matriz canónica de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

se simplifica escribiendo

$$A = PBP^{-1}$$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tema 1. Cálculo matricial

Matrices

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -11 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

comprobar si son ciertas las siguientes identidades algebraicas:

a) $B + C = C + B$.

b) $A(2B - C) = 2AB - AC$.

c) $AB = BA$.

d) $B^t C = (C^t B)^t$.

e) $(D + E)^2 = D^2 + 2DE + E^2$.

f) $D = \frac{D+D^t}{2} + \frac{D-D^t}{2}$.

Problema 2. La empresa I.D.C. fabrica en su planta de Zaragoza tres tipos de televisores: de 14, 21 y 25 pulgadas. Los almacenes principales se encuentran en Madrid, Barcelona, Vigo y Sevilla. Las ventas durante el año 2014 del almacén de Madrid se cifraron en 400, 100, y 500 televisores de 14, 21 y 25 pulgadas respectivamente; las del almacén de Barcelona en 300, 150 y 400; las del almacén de Vigo en 100, 100 y 200 y las del almacén de Sevilla en 200, 150 y 300. Los precios de venta de los televisores en 2014 fueron de 250 € para los de 14 pulgadas, de 300 € para los de 21 pulgadas y de 370 € para los de 25 pulgadas. Se pide:

1. Expresar las ventas de la empresa mediante una matriz A de orden 4×3.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problema 4. Demostrar que si una matriz cuadrada A es simétrica o antisimétrica entonces A^2 es simétrica.

Problema 5. Demostrar que $(I_{n,2})^k = I_{n,k+1}$ para $k \geq 0$, donde $I_{n,k}$ es por definición la matriz cuadrada de orden n donde toda entrada es cero salvo las de la diagonal k, que son unos; si $k > n$ se sobreentiende que $I_{n,k} = \mathcal{O}_n$. Por ejemplo,

$$I_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{n,1} = I_n, \quad \text{e} \quad I_{4,5} = \mathcal{O}_4.$$

Problema 6. Utilizando la fórmula del ejercicio anterior, calcular el producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Determinantes

Problema 7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$, calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11}-2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Problema 8. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3. Se pide:

a) Si $|A| = 3$ y $|B| = -2$, calcular $|AB|$, $3|A|$, $|3A|$, $|-2B|$, $|A^4|$ y $|A^tA|$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $|A| + |B|$ y $|A+B|$. ¿Qué se puede deducir de lo obtenido?

Problema 9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular AA^t.

b) Hallar, utilizando lo obtenido en el apartado anterior, el valor de $|A|$.

Problema 10. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

b) $\begin{vmatrix} 3 & -x & -3 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

c) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-x & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-x & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-x \end{vmatrix} = 0.$

d) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$

Problema 12. Determinar, haciendo uso del concepto de determinante, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}.$

Problema 13. Determinar el rango de la matriz A según el valor del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

Problema 14. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar para qué valores de a son invertibles

b) Para el menor natural que cumplan ser invertibles, calcular su matriz inversa.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Sistemas

Problema 15. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas y resolverlos cuando sea posible:

a) $$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 3 \\ & x_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & = & 5 \\ x_1 & -3x_2 & = & -5 \\ 3x_1 & +x_2 & = & 5 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{array}\right.$$

e) $$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & -8x_3 & +7x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Problema 16. Una empresa fabrica tornillos y tuercas, los cuales deben pasar por una máquina cortadora C y otra moldeadora M. Para elaborar un tornillo se requiere utilizar 1 minuto la máquina C y dos minutos la máquina M y la fabricación de una tuerca necesita utilizar 2 minutos la máquina C y 1 minuto la máquina M. Determinar la producción en una jornada de 8 horas de forma que se agoten los tiempos disponibles de ambas máquinas.

Problema 17. En una fábrica se producen 3 productos, P_1, P_2 y P_3, a partir de tres materias primas Q_1, Q_2 y Q_3. Para fabricar una unidad de P_1 se precisan 2 unidades de Q_1, 1 de Q_2 y 1 de Q_3. Para P_2 se necesitan 3 unidades de Q_1, 2 de Q_2 y 1 de Q_3 y para P_3 se requieren 4, 2 y 2 unidades de Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente. Disponemos diariamente de 90 unidades de Q_1, 50 de Q_2 y 40 de Q_3. Calcular la producción diaria de P_1, P_2 y P_3 considerando que se utiliza toda la materia prima.

Problema 18. En una feria de ganado un granjero compró cerdos, vacas y caballos de carreras. Los cerdos los compró a 50 €, a 1000 € las vacas y a 5000 € los caballos de carreras. Compró 100

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$+5y \quad +az \quad = \quad a$ $\qquad$ $x \quad +ay \quad -2z \quad = \quad a-1$

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problema 20. Se considera un sistema de ecuaciones incompatible $AX = B$. Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $B \neq \mathcal{O}$.

b) Si la matriz A es cuadrada, su determinante debe ser 0.

Problema 21. Suponga que A es una matriz cuadrada de orden tres nilpotente, es decir, existe un número natural n tal que $A^n = \mathcal{O}_{3x3}$. ¿Es cierto que el sistema homogéneo $AX = \mathcal{O}_{3x1}$ tiene sólo la solución trivial?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tema 2. Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

Sistemas independientes

Problema 22. Decide si el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ y $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$ es un espacio vectorial.

Problema 23. Estudiar si los siguientes sistemas son linealmente independientes:

1. $S = \{(1, 2, 3, 0),(4, 3, 4, -16),(7, 3, 4, 5)\}$.
2. $S = \{(1, 0, 0, -1),(2, 1, 1, -2),(0, 1, 1, 0),(1, -1, -1, -1)\}$.
3. $S = \{(4, -5, 7),(3, 3, 4),(1, 1, -2),(2, -1, 1)\}$.

Problema 24. Suponga que $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es libre. ¿Lo es $\{\bar{u}, \bar{v} + \lambda\bar{u}\}$?

Problema 25. Suponga que $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ son linealmente independientes. Pruebe que también lo son $\bar{v}_1 = \bar{u}_1, \bar{v}_2 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \ldots, \bar{v}_n = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_n$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Subespacios vectoriales

Problema 26. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \{(x, y, z) \ / \ x = y = z\}$.
2. $B = \{(a, b, c) \ / \ a^2 + b^2 = c^2\}$.

Problema 27. ¿Es $\{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \ / \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$?

Problema 28. Sean $\bar{u}, \bar{v}$ dos vectores de un espacio vectorial E. ¿Es $A = \{\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de E?

Problema 29. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

1. $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \ / \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
2. $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 x_2 = 0\}$.
3. $C = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \ / \ x_1 \in \mathbb{R}\}$.
4. $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ 2x_1 + x_4 = 0\}$.
5. $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + 2x_4 = 7\}$.
6. $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$.
7. $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$.

Problema 30. Determinar a y b para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Dimensión y coordenadas. Ecuaciones paramétricas e implícitas

Problema 31. En $\mathbb{R}_3[x]$ se considera el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$. Se pide:

1. Demostrar que los polinomios $p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)$ constituyen una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Hallar las coordenadas de $q(x) = 15x^3 - 21x^2 - 18x + 37$ en dicha base suponiendo que $p(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

Problema 32. Obtener una base para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones paramétricas en la base canónica son

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \alpha + \beta \\ x_2 = \lambda - \alpha + 3\beta \\ x_3 = \lambda + 2\alpha \\ x_4 = 2\lambda + 3\alpha + \beta \end{cases}$$

Problema 33. Obtenga de modo razonado la dimensión de un espacio vectorial E, suponiendo que E tiene dos subespacios V y W, suplementarios entre sí, y ambos están determinados por dos ecuaciones implícitas independientes.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Subespacios intersección, suma y suma directa. Ecuaciones paramétricas e implícitas

Problema 34. Considérense los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,0)\} \quad \text{y} \quad W = \mathcal{L}\{(1,-1,0,0),(1,0,1,0)\}.$$

Se pide:

1. Halle una base del subespacio intersección $V \cap W$.
2. Halle unas ecuaciones implícitas, respecto a la base canónica, del subespacio suma $V + W$.

Problema 35. Sea $\mathcal{M}_n$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden n. Se pide:

1. Demostrar que los conjuntos de matrices simétricas $\mathcal{S}_n$ y antisimétricas $\mathcal{A}_n$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n$.
2. Descomponer la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
3. Demostrar que $\mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
4. Calcular la dimensión y una base de $\mathcal{S}_n$ y $\mathcal{A}_n$.

Problema 36. Sea el espacio vectorial $\mathcal{S}_3$ de las matrices simétricas reales de orden tres. Se pide:

1. Pruebe que $V = \{S \in \mathcal{S}_3 \ / \ \text{traza}\ (S) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}_3$.
2. Pruebe que el subconjunto $W = \{\lambda I_3 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}^3\}$ formado por las matrices escalares es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}_3$.
3. Obtenga bases de V, W, $V \cap W$ y $V + W$. ¿Es la suma $V + W$ directa?

Problema 37. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$ formado por los polinomios con coeficientes reales en una indeterminada y grado menor o igual que tres, se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$V = \mathcal{L}\{x^2 - x + 1, x^3 - 2x^2 + 5x - 1, x^3 - 5x^2 + 8x - 4\} \quad W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ p(2) = p'(2) = 0\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problema 38. En $\mathbb{R}_3[x]$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ p'(1) = 0\}, \quad W = \mathcal{L}\{-1 + 2x - 2x^2 - 6x^3, 2 - x + 3x^2 + 5x^3, 3 + 4x^2 + 4x^3\}.$$

Se pide:

1. Hallar sus dimensiones.
2. Hallar ecuaciones implícitas para V y W respecto de la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
3. Hallar la dimensión y una base de los subespacios $V \cap W$ y $V + W$.

Problema 39. Sean V y W dos subespacios de $\mathbb{R}^3$. Respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, las ecuaciones paramétricas de V son $\begin{cases} x = \lambda + \gamma \\ y = \mu + \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \end{cases}$ y W está definido por la ecuación implícita $x - y + 2z = 0$.

Se pide:

1. Bases de V, W, $V \cap W$ y $V + W$.
2. Unas ecuaciones implícitas para $V \cap W$.
3. Una base de un espacio suplementario de $V + W$.

Problema 40. En $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y los subconjuntos V formado por los polinomios que tienen a 1 por raíz, y W formado por los polinomios sin término independiente. Se pide:

1. Probar que V y W son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_2[x]$ y hallar una base de cada uno de ellos.
2. Hallar $V \cap W$ y $V + W$.
3. Hallar unas ecuaciones paramétricas de un espacio suplementario de $V \cap W$ en $\mathbb{R}_2[x]$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Matriz de cambio de base

Problema 41. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las bases $\mathcal{A} = \{(1,0),(1,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(-1,1),(0,1)\}$ y el vector $\bar{u} = (3,2)$. Se pide:

1. Calcule la matriz de cambio de base $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ (donde $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ es la matriz que multiplicada por las coordenadas de un vector en la base $\mathcal{A}$ da las coordenadas en la base $\mathcal{B}$).
2. Calcule las coordenadas de $\bar{u}$ en la base $\mathcal{A}$.
3. Calcule las coordenadas de $\bar{u}$ en la base $\mathcal{B}$ haciendo uso de la matriz de cambio de base, y directamente.

Problema 42. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2$ formado por las matrices reales de orden dos se consideran las bases

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se pide:

1. Calcula las coordenadas, respecto de $\mathcal{A}$, de la matriz M con coordenadas $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}$.
2. Obtenga la matriz de cambio de base P que realiza el cambio $PX_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{B}}$ donde $X_{\mathcal{A}}$ son coordenadas respecto de $\mathcal{A}$ y $X_{\mathcal{B}}$ son coordenadas respecto de $\mathcal{B}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aplicaciones lineales. Subespacios núcleo e imagen

Problema 43. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones $f : E \to F$ son lineales:

1. $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{x}_0$ siendo $\bar{x}_0$ un vector fijo de $\mathbb{R}^3$ (traslación).
2. $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = \bar{x}_0$ siendo $\bar{x}_0$ un vector fijo de $\mathbb{R}^3$ (aplicación constante).
3. $E = F = \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x}) = k\bar{x}$ siendo k una constante (homotecia).
4. $E = F = \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x})$ es el vector que se obtiene girando $\bar{x}$ un ángulo fijo α (giro).
5. $E = F = \mathcal{M}_n$, $f(A) = A + A^t$.
6. $E = F = \mathbb{R}_3[x]$, $f(p(x)) = xp'(x)$.
7. $E = \mathbb{R}_2[x]$, $F = \mathcal{M}_2$, $f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
8. $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, 1, y)$.
9. $E = F = \mathbb{R}_2[x]$, $f(p(x)) = \dfrac{\int_0^x p(t)\ dt}{x} + p'(x)$.

Problema 44. Dadas las aplicaciones lineales

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ \text{ definida por } g(x, y, z) = (x + y, 0)$$

y

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ \text{ definida por } f(x, y, z) = (x, x + y, -z),$$

se pide:

1. Calcular sus núcleos e imágenes. Estudiar si son biyectivas.
2. Obtener $g^{-1}(0, 0)$, $g^{-1}(0, 1)$ y $g^{-1}(2, 0)$.
3. Obtener $f^{-1}(0, 0, 0)$ y $f^{-1}(1, 2, -1)$.
4. Obtener $f(V)$ siendo $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
5. Obtener $f^{-1}(W)$ donde W es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones implícitas $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$

Problema 45. Sean las aplicaciones lineales $f(x, y, z) = (x+y+z, x+y, z)$ y $g(x, y, z) = (x-y, x+z)$,

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Problema 46. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la fórmula $f(p(x)) = (p(2), p(3))$. Determine una base del núcleo de f.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aplicaciones lineales y matrices

Problema 47. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que hace corresponder a los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0)$ los vectores $(0, 1)$, $(0, 2)$ y $(1, 1)$ respectivamente. Se pide:

1. La matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.
2. El rango de f. ¿Es f inyectiva?
3. El subespacio transformado $f(V)$ donde V es el plano de ecuación implícita $x + y - z = 0$.

Problema 48. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$ determinada por las condiciones siguientes:

$$f(1, 0, 1) = 1 + x, \quad f(0, 1, 1) = -1, \quad f(1, 1, 0) = f(1, 1, 1).$$

Se pide:

1. Hallar la matriz de f tomando la base canónica en el espacio inicial y la base $\{1, x\}$ en el final.
2. Hallar una base del subespacio imagen.
3. Hallar una base del núcleo.

Problema 49. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ determinada por las condiciones siguientes:

$$f(13, 1, 1) = f(13, -2, 1), \quad f(1, -1, 1) = x + 2x^2, \quad f(3, 2, -1) = 3x - 2x^2.$$

Se pide:

1. Hállese la matriz de f tomando la base canónica en $\mathbb{R}^3$ y la base $\{1, x, x^2\}$ en $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Hállese $f(V)$ donde $V = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 + x_3 = 0\}$.

Problema 50. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal determinada por las siguientes condiciones:

$$\ker\ (f) = \{p(x) \ / \ p(1) = p(-1) = 0\}, \quad \mathrm{im}\ (f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ / \ a + b + c = 0 \right\},$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. Hallar la matriz de f considerando las bases $\{1, x, x^2\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problema 51. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ determinado por las condiciones $f(1,1,1,1) = (1,1,0,0)$, $f(1,1,1,0) = (1,0,0,0)$ y además $f^2 = f \circ f$ es el endomorfismo nulo. Se pide:

1. Calcular la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
2. Calcular el núcleo y la imagen de f.

Problema 52. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por la fórmula $f(p(x)) = kp(x) + p'(x)$ donde k es un número real fijo. Se pide:

1. Probar que f es lineal.
2. Obtener el núcleo y la imagen de f en función de k.
3. Suponiendo $k = 1$, hallar la matriz de f considerando la base $\mathcal{B} = \{2, x+1, x^2-1, x^3+1\}$ tanto en el espacio de salida como en el de llegada.

Problema 53. Sea f un endomorfismo no nulo de un espacio vectorial de dimensión n. Demostrar que $\ker(f)$ =im(f) si y solo si $f^2 = f \circ f$ es el endomorfismo nulo y el rango de f es $\frac{n}{2}$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Composición de aplicaciones y producto de matrices

Problema 54. Se consideran las aplicaciones lineales

$$f : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4, \quad f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = (y, x, z, y)$$

y

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \quad g(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x+y & z+t \\ z+t & x+t \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Considerando las bases canónica en $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, obtener las matrices de f y de g.
2. Hallar la matriz de la composición $h = g \circ f$ en la base $\mathcal{B}$ del apartado anterior.
3. Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f, de g y de $h = g \circ f$.
4. Determinar, si existe, el endomorfismo inverso h^{-1}.

Ejercicio preparatorio para el siguiente tema

Problema 55. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x, y, z) = (y, 3x - 2y + 6z, x - y + 2z).$$

Se pide:

1. Hallar la matriz A del endomorfismo f en la base canónica $\mathcal{A} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
2. Hallar la matriz B del endomorfismo f en la base $\mathcal{B} = \{(3,-3,-2), (2,0,-1), (1,1,0)\}$.
3. Obtener una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tema 3. Diagonalización y matriz de Jordan

Semejanza

Problema 56. Pruebe que la relación de semejanza es una relación de equivalencia, comprobando las siguientes propiedades:

1. Propiedad reflexiva: toda matriz es semejante a si misma.
2. Propiedad simétrica: si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
3. Propiedad transitiva: si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

Problema 57. ¿Son semejantes las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? En este ejercicio se trata de aplicar la fuerza bruta, y comprender su inoperancia para matrices de orden superior.

Problema 58. ¿Qué matrices son semejantes a la matriz nula? ¿Y a la matriz identidad?

Problema 59. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.
2. Dos matrices semejantes tienen la misma traza. Indicación: recuerde que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Problema 60. Pruebe que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. Mediante un ejemplo muestre que el resultado recíproco no es cierto.

Problema 61. ¿Son semejantes las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -9 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Autovalores y autovectores

Problema 62. Sea f un endomorfismo de un espacio E de dimensión finita. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Razone las respuestas:

1. f es inyectivo si y sólo si 0 no es autovalor de f.
2. f es un isomorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de f (use el apartado anterior y la fórmula de la dimensión).
3. Si λ es autovalor de f, entonces λ^n lo es de f^n.
4. Si λ es autovalor de un isomorfismo f, entonces $-\lambda$ lo es de su inversa f^{-1}.
5. Si $\bar{u}$ es autovector de f, entonces lo es de $f^4 - 3f + 5\,\mathrm{id}_E$.
6. Si 3 es autovalor de f, entonces lo es de $f^4 - 3f + 5\,\mathrm{id}_E$.

Problema 63. Cierto endomorfismo f es representable mediante la matriz $M_{f,\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & \star \\ \star & \star & 0 & \star \\ \star & \star & 5 & \star \\ \star & \star & 0 & \star \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{A} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$. ¿Qué puede decirse del vector $\bar{u}_3$? ¿Y del valor 5?

Problema 64. Calcule los autovalores y autovectores, multiplicidades y dimensiones geométricas de los siguientes endomorfismos (en muchos casos tendrá que obtener primero el polinomio característico, pero en otros será más fácil basarse directamente en las definiciones):

1. El endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (3x, x+2y, 4x-2z)$.
2. El endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (x+2y+10z, 2x+y+10z, -x-y-6z)$.
3. El endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ representado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base canónica.
4. El endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.
5. El endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ [illegible]

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

8. El endomorfismo r de $\mathbb{R}^2$ que consiste en la *reflexión* respecto de la recta $y = \frac{1}{2}x$. ¡Dibuje!

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El caso diagonalizable

Problema 65. Encuentre una matriz de Jordan para un endomorfismo no inyectivo de un espacio vectorial de dimensión cuatro, que tiene dos autovectores linealmente independientes asociados al autovalor tres, y un vector que permanece fijo por la transformación.

Problema 66. ¿Son los siguientes endomorfismos diagonalizables? En caso afirmativo, encuentre una base de autovectores y la matriz canónica de Jordan (diagonal) correspondiente:

1. El endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y) = (x + y, 3y)$.
2. El endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y) = (2x, -x + 3y)$.
3. El endomorfismo *derivar* de $\mathbb{R}_2[x]$ definido por $D(p(x)) = p'(x)$.
4. El endomorfismo *trasponer* de $\mathcal{M}_2$ definido por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Problema 67. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}_2[x]$ definido por

$$f(a + bx + cx^2) = (2a - b - c) + (-a + 2b - c)x + (a + b + 4c)x^2.$$

Se pide:

1. La matriz A de f en la base $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$.
2. La matriz canónica de Jordan J y una matriz de paso P tal que $A = PJP^{-1}$.

Problema 68. Sea f la reflexión de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano V de ecuación $y + z = 0$. Se pide:

1. Mediante un dibujo, encuentre una base $\mathcal{J}$ formada por autovectores de f, y obtenga la matriz de Jordan J correspondiente.
2. Sea $\mathcal{A}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcule las matrices de cambio de base $P = M_{\mathcal{J},\mathcal{A}}$ y P^{-1}. A partir de J, P y P^{-1} obtenga la matriz de f en la base $\mathcal{A}$.

Problema 69. Sea f la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano V de ecuación $x - 2y + z = 0$. Se pide:

1. Mediante un dibujo, encuentre una base $\mathcal{J}$ formada por autovectores de f, y obtenga la matriz

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

polinomio característico y obtenga los autovalores (observará que son números complejos). Obtenga una matriz de Jordan (compleja) y las matrices de paso correspondientes.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Espacios invariantes de orden superior

Problema 71. Hallar la forma canónica de Jordan J para una matriz A, sabiendo que los autovalores de A son $1, -1$ y 6 y las dimensiones de sus espacios invariantes son las siguientes:

- $\dim N_1(1) = \dim N_2(1) = 1$,
- $\dim N_1(-1) = 1$, $\dim N_2(-1) = 2$, $\dim N_3(-1) = \dim N_4(-1) = 3$,
- $\dim N_1(6) = \dim N_2(6) = 1$.

Problema 72. De una matriz cuadrada de orden siete con determinante cero se sabe además lo siguiente:

- $\dim\ N_1(3) = 2$ y $\dim\ N_2(3) = \dim\ N_3(3) = 3$.
- $\dim\ N_1(-1) = 1$, $\dim\ N_2(-1) = 2$ y $\dim\ N_3(-1) = 3$.

Obtenga la matriz de Jordan y explique cómo escoger una base $\mathcal{J}$ de Jordan.

Problema 73. Un endomorfismo f de un espacio vectorial E se codifica por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{A} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. Se pide:

1. Calcule los autovalores, multiplicidades y dimensiones geométricas.
2. ¿Es A una matriz diagonalizable? ¿Es f un endomorfismo diagonalizable?
3. Pruebe que $\bar{u}_2$ es un autovector asociado al autovalor 3.
4. Pruebe que $\bar{u}_1 \in N_2(3) = \ker(f - 3\ \mathrm{id}_E)^2$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

El caso general

Problema 74. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}_2[x]$ definido por $f(a+bx+cx^2) = 3a+(a+3b)x+(2c-a)x^2$. Se pide:

1. La matriz A de f en la base $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$.
2. Una matriz canónica de Jordan J y una matriz de paso P tal que $A = PJP^{-1}$.

Problema 75. Calcule la forma canónica de Jordan y la matriz de paso para cada una de las siguientes matrices (que puedes considerar codifican a un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en la base canónica):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Problema 76. Para los distintos valores de los parámetros a y b, calcular una forma canónica de Jordan y una matriz de paso para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Problema 77. Sea f el endomorfismo de $\mathcal{M}_2$ definido por la igualdad $f(A) = A + A^t$. Se pide:

1. Matriz A de f en la base $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. Una matriz canónica de Jordan J y una matriz de paso P tal que $A = PJP^{-1}$.

Problema 78. Sea $f_{\bar{u}}$ la familia de endomorfismos sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$f_{\bar{u}}(\bar{v}) = \bar{u} \times \bar{v},$$

(producto vectorial por un vector fijo $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$). Se pide:

1. La matriz $M_{\bar{u}}$ del endomorfismo $f_{\bar{u}}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

3. Una matriz de paso P tal que $M = PJP^{-1}$.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aplicación al cálculo de las potencias y la exponencial de una matriz

Problema 80. Calcule la potencia 1000 de la matriz $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Problema 81. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcule una matriz de Jordan J y matrices de paso P y P^{-1} tales que $A = PJP^{-1}$.
2. Usando el apartado anterior y el binomio de Newton, obtenga A^k para cualquier natural k.

Problema 82. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcule una matriz de Jordan J y matrices de paso P y P^{-1} tales que $A = PJP^{-1}$.
2. Usando el apartado anterior y el binomio de Newton, obtenga A^k para cualquier natural k. ¿Cuánto vale A^5?

Problema 83. Considere el endomorfismo $f(p(x)) = (x^2-1)p''(x) + 2xp'(x)$ de $\mathbb{R}_3[x]$. Se pide:

1. Calcule la matriz A de f en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Obtenga los autovalores y los espacios de autovectores correspondientes.
3. ¿Es f diagonalizable?
4. Obtenga la potencia k-ésima de f. Nota: estos endomorfismos son útiles en la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden dos.

Problema 84. Sea $J = \begin{pmatrix} 7 & & \\ 1 & 7 & \\ & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule e^J.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problemas aplicados

Problema 86. Cada año, ocho décimas partes de los habitantes de Entrín Alto se muda a Entrín Bajo, permaneciendo el resto en Entrín Alto. De Entrín Bajo, cada año tres décimas partes de su población se muda a Entrín Alto, permaneciendo el resto en Entrín Bajo. La comarca formada por estos dos pueblos vive aislada del mundo exterior, y mantiene una población constante de 1100 habitantes. Al cabo de muchísimos años, ¿qué población habrá en cada uno de los dos pueblos?

Indicación: sea a_k la población de Entrín Alto en el año k, y sea b_k la población de Entrín Bajo en el año k. Por ejemplo, $a_0 + b_0 = 1100$. Siga ahora los siguientes pasos:

- Plantee un sistema de dos ecuaciones que regule el flujo de población.
- Exprese el sistema matricialmente mediante una matriz A cuadrada de orden dos.
- Observe que la evolución de la población está dada por las potencias de la matriz A.
- Obtenga una forma canónica de Jordan para A y matrices de paso.
- Calcule la potencia A^k para cualquier k.
- ¿A qué tiende A^k cuando k tiende a infinito?

Problema 87. Cada año la décima parte de la gente que vive fuera de California se muda a California, y dos décimas partes de la gente que vive en California se muda fuera. Se desea saber si la población tiende finalmente a un estado estacionario, y en caso afirmativo, qué estado es ese.

Problema 88. La sucesión de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ se construye empezando con $F_0 = 0, F_1 = 1$ y siguiendo la relación de recurrencia

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k.$$

Esto se puede expresar en forma matricial poniendo $\bar{u}_{k+1} = A\bar{u}_k$, o equivalentemente

$$\bar{u}_k = A^k \bar{u}_0$$

siendo $\bar{u}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$ el vector (de estado) y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz (de transición). Utilizar la

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Problema 89. En un modelo simple de ecosistema en el que conviven presa y depredador, cada mes el número de depredadores es la décima parte de los que había (una reducción debida a cierta enfermedad endémica) más un 40 % de las presas, que sirven de alimento. Además, cada mes el número de presas se incrementa en un 10 % por nacimientos, menos una cantidad proporcional al número de depredadores del mes anterior por depredación y otras circunstancias naturales. Formular matricialmente el modelo y encontrar el estado estacionario (una vez pasados suficientes años), cuando exista, en función de la constante de proporcionalidad mencionada anteriormente. Interpretar los resultados.

Problema 90. La agencia de transportes Sábado Express tiene la flota de camiones distribuida entre Madrid, Sevilla y Barcelona. De los camiones que hay al principio de cada mes en Madrid, al final del mismo mes la mitad vuelve a Madrid, la cuarta parte está en Sevilla y el resto en Barcelona. De los que al principio del mes están en Barcelona, a fin de mes la mitad va a Madrid, la cuarta parte a Sevilla y el resto vuelve a Barcelona. Por último, de los que hay en Sevilla, la tercera parte vuelve a Sevilla y el resto va a Barcelona. Calcular el tanto por ciento de camiones que hay al cabo de infinito tiempo en cada ciudad, suponiendo que el número de camiones es constante.

Problema 91. Los vértices de un polígono cerrado con n lados están numerados consecutivamente (es decir, hay una arista de v_1 a v_2, una de v_2 a v_3, etc., y una arista final de v_n a v_1). Una rana parte del vértice v_1 y salta de un vértice a otro, siendo $\frac{1}{2}$ la probabilidad de saltar a cada uno de los dos vértices contiguos. Con el paso del tiempo, ¿hay algún vértice en el que sea más probable encontrar a la rana?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tema 4. Espacio euclídeo

Producto escalar. Generalidades

Problema 92. Sea el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$. Sean las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(1,2)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$. Se pide:

1. Calcular la matriz de Gram G_1 para $\mathcal{B}_1$.

2. Calcular la matriz de Gram G_2 para $\mathcal{B}_2$.

3. Comprobar que G_1 y G_2 son congruentes dando una matriz regular P tal que $G_1 = P^t G_2 P$.

Problema 93. En un espacio euclídeo $(E, \bullet)$ consideramos una base ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y un vector $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$. Probar lo siguiente:

1. La coordenada i-ésima de $\bar{x}$ es el producto escalar de $\bar{x}$ con el vector i-ésimo de la base, o sea
$$x_i = \bar{x} \bullet \bar{e}_i.$$

2. $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Problema 94. Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Se pide:

1. Determinar un vector unitario ortogonal a los vectores $(1,2,0)$ y $(1,1,-2)$.

2. Determinar una base del subespacio ortogonal a $V = \{(x,y,z) \,/\, x - y - 2z = 0\}$.

3. Calcular una base ortonormal del subespacio generado por $\{(1,-1,0),(1,0,1)\}$.

Problema 95. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se considera el producto escalar

$$p(x) \bullet q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Se pide:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Proyección ortogonal

Problema 96. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ considere el plano $V = \mathcal{L}\{(1,0,1),(-1,1,1)\}$ y el vector $\bar{u} = (1,-1,3)$. Hallar la proyección ortogonal de $\bar{u}$ sobre V mediante dos procedimientos:

1. Aplicando la definición de proyección ortogonal.
2. Mediante la matriz de proyección sobre V.

Problema 97. Considere el plano $V = \mathcal{L}\{(1,2,3),(1,0,2)\}$ en el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$. Se pide:

1. Hallar la matriz de la proyección ortogonal sobre V en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
2. Hallar la proyección ortogonal de $(1,1,1)$, $(0,2,1)$ y $(4,1,-2)$ sobre V. Explicar los resultados.

Problema 98. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ se considera la recta V generada por $(1,2,-1)$ y su subespacio ortogonal $V^\perp$. Se pide:

1. Calcular una base de $V^\perp$.
2. Hallar la matriz de la proyección sobre V.
3. Hallar la proyección de $(1,-1,3)$ sobre V.
4. Hallar la proyección de $(1,-1,3)$ sobre $V^\perp$.

Problema 99. En $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos el producto escalar

$$p(x)\cdot q(x) = \int_{-2}^{2} p(x)q(x)\ dx.$$

Calcular la proyección ortogonal de $1+x+x^2$ sobre el subespacio $V = \mathcal{L}\{1,x\}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Introducción a las series de Fourier

Problema 100. En el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0, 2\pi]$ consideramos el producto escalar

$$f \bullet g = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Sea V el subespacio generado por el sistema de funciones $\mathcal{S} = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$. Se pide:

1. Comprobar que $\mathcal{S}$ es un sistema ortogonal.
2. Obtener una base ortonormal de V.
3. Hallar la proyección ortogonal de $f(x) = x$ sobre V.
4. Sea $g(x) = 3 - 2\cos x + 5 \operatorname{sen} x$. ¿Cuánto vale la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x) \operatorname{sen} x \; dx$?

Problema 101. La información del ejercicio anterior puede generalizarse del siguiente modo:

1. Comprobar que el siguiente sistema de funciones es ortogonal:

   $$S = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \dots\}$$

   Para ello tenga en cuenta las siguientes relaciones:

   $$2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

   $$2\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b),$$

   $$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

2. Sabiendo que cualquier señal *razonable* $f(x)$ puede escribirse como

   $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

   obtener los coeficientes a_2 y b_2 para la señal $f(x) = e^x$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Aproximación mediante el método de mínimos cuadrados

Problema 102. Se consideran los puntos $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,8)$ y $(4,2)$. Se pide:

1. Hallar, por el método de los mínimos cuadrados, el mejor ajuste lineal $y = a + bx$.
2. Hallar, por el método de los mínimos cuadrados, el mejor ajuste cuadrático $y = a + bx + cx^2$.
3. Representar gráficamente la recta y la parábola obtenidas. Discutir el resultado.

Problema 103. En una exposición de automóviles, un visitante realizó un conjunto de observaciones relacionando el precio de los vehículos con sus pesos, anotando los siguientes datos:

Pesos (Tm)	0,8	1	1,2	1,3
Precios (Miles de euros)	6	12	18	30

Hallar, por el método de los mínimos cuadrados, el mejor ajuste lineal. Estimar el precio de un coche de 1.5 Tm.

Problema 104. La temperatura media de los meses de febrero de cuatro años consecutivos ha sido, en grados centígrados, 1, -1, 2 y 3, respectivamente. Hallar, por el método de los mínimos cuadrados, el mejor ajuste lineal $y = a + bx$. Estimar la temperatura en el quinto año.

Problema 105. En un parque natural, el número de conejos estimado (en miles) en cuatro años consecutivos fue 1.5, 4.5, 8 y 12. Se espera que los datos se ajusten a una función exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$ donde t es el tiempo medido en años. Hallar dicho ajuste por el método de los mínimos cuadrados y estimar el número de conejos para el quinto año. Nota: tomar logaritmos neperianos para convertir el ajuste exponencial en un ajuste lineal.

Problema 106. Dado el conjunto de rectas

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\},$$

¿qué punto está más próximo a las tres rectas a la vez? Explique el sentido de dicha aproximación.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Matrices ortogonales. Diagonalización ortogonal

Problema 107. Demostrar las siguientes propiedades:

1. Si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.
2. Si A es ortogonal, también lo son A^{-1} y A^t.
3. Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es ortogonal.

Problema 108. Probar que la matriz de giro $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal. Probar que $A_\alpha A_\beta$ es una matriz de giro.

Problema 109. Hallar una matriz ortogonal A tal que $A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Problema 110. Diagonalizar ortogonalmente las siguientes matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11 & -16 & 8 \\ -16 & 11 & 8 \\ 8 & 8 & 23 \end{pmatrix}.$$

Pseudoinversa de una matriz

Problema 111. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ de orden 4×2, vamos a construir una matriz B de orden 2×4 tal que $BA = I_2$, es decir, una matriz que es inversa de A por la izquierda. Esta matriz se denomina matriz *pseudoinversa* de A. Siga los siguientes pasos:

1. Obtener los autovalores positivos $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ de A^tA. Comprobar que se obtiene lo mismo trabajando con AA^t.
2. Obtener los *valores singulares* $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$ de A. Por definición, los valores singulares de una matriz A son las raíces cuadradas positivas de los autovalores positivos de A^tA (o de AA^t).
3. Obtener una base ortonormal de autovectores (vectores columna) $\{Q_1, Q_2\}$ de A^tA.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Problema 112. Construir una inversa por la derecha para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Transformaciones ortogonales

Problema 113. ¿Cuáles de los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ son transformaciones ortogonales? Para los que lo son, indicar el tipo de transformación.

1. $f(x, y) = (-y, x)$.
2. $g(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$.
3. La proyección ortogonal sobre la recta $y = 2x$.
4. La homotecia $h(x, y) = 2(x, y)$ de razón $r = 2$.
5. El endomorfismo con matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Problema 114. Obtener las ecuaciones de las siguientes transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$:

1. Reflexión respecto de la recta $y = 3x$.
2. Giro de ángulo $\frac{\pi}{3}$ en sentido antihorario.

¿Qué transformación ortogonal se obtiene al componer las dos anteriores?

Problema 115. ¿Cuáles de los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ son transformaciones ortogonales? Para los que lo son, indicar el tipo de transformación.

1. $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z, -2x + y - 2z, x - 2y - 2z)$.
2. $g(x, y, z) = (-y, x, z)$.
3. h satisfaciendo: $h\left(1, 0, -\sqrt{3}\right) = (0, 0, -2)$, $h\,(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ y $h\left(\sqrt{3}, 0, -1\right) = (2, 0, 0)$.

Problema 116. Obtener las ecuaciones de las siguientes transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$:

1. Simetría respecto al plano $x + y + z = 0$.
2. Simetría respecto a la recta generada por $(1, -1, 1)$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.