DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Dobles Grados de Matemáticas y Física y Matemáticas e Informática.
Analisis de Variable Real. Curso 11–12.
Primer Parcial. 10 de Febrero de 2012

1 (1,5 puntos) *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $A \subset M$ *un conjunto no vacío.*

i) Probar que $\overset{\circ}{A}$ *es abierto y es el abierto mas grande contenido en* A.

Indicación: *Si* O *es un abierto tal que* $O \subset A$ *probar que* $O \subset \overset{\circ}{A}$.

ii) Probar $\overline{A}$ *es cerrado y es el cerrado mas pequeño que contiene a* A.

Indicación: *Si* C *es un cerrado tal que* $A \subset C$ *probar que* $\overline{A} \subset C$.

2 (1,5 puntos)

i) Probar que una sucesión monótona decreciente $\{x_n\}_n \in \mathbb{R}$ *es convergente sí y sólo sí es acotada.*

ii) Probar que una sucesión $\{x_n\}_n \in [0, \infty)$ *verifica* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *sí y sólo sí no tiene ninguna subsucesion convergente.*

3 (1 punto) *Probar que*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}\cos(\sqrt{n}\pi) = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}\cos(\sqrt{n}\pi) = 1$$

Indicación: *Hacer primero una acotacón del valor absoluto y despues usar subsucesiones adecuadas de números naturales.*

4 (1,5 puntos) *Estudia la convergencia de las series:*

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} 2^{-n}, \quad x \in \mathbb{R},$

ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (\ln(n))^b}, \quad a, b \geq 0.$

5 (2 puntos) *Enunciar y demostrar el teorema de Bolzano para una función continua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(a) < 0$ *y* $f(b) > 0$.

6 (1,5 puntos) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Para cada* $x_0 \in \mathbb{R}$ *fijo, definimos*

$$D(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

supuesto que existe.

i) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ *es tal que* $D(x_0)$ *existe, probar que* f *es continua en* x_0.

ii) Supongamos que $D(x_0) > 0$. *Probar que existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *y* $t \in (x_0, x_0 + \delta)$ *se tiene* $f(x) < f(x_0) < f(t)$.

iii) Supongamos que $D(x_0) > 0$ *para todo* $x_0 \in (a, b)$, **conjetura** *cómo se comporta la función* f *en el intervalo* (a, b).

Indicación: *En este apartado NO hay que demostrar nada.*

7 (1 punto) *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \dfrac{e^x - \operatorname{sen}(x^2)}{e^x + \cos^2(x^2)}$. *Estudia los límites* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.