

# Electromagnetismo. Febrero 2015. 1ª Semana

**Instrucciones:** El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. MATERIAL: Calculadora no programable.

---

**TEORIA:** Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilice la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.


- 1.- Considere los siguientes potenciales:  $V = 0$  ;  $\mathbf{A} = A_o \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y$ , con  $A_o$ ,  $\omega$  y  $k$  constantes. Encuentre los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  y compruebe que los campos obtenidos satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío. ¿Qué condición debemos imponer sobre  $k$ ?
- 2.- Si el flujo del vector de Poynting a través de una superficie cerrada es positivo ¿Significa esto que la energía electromagnética almacenada en el volumen limitado por dicha superficie disminuye? Razone la respuesta.
- 3.- ¿Qué son los potenciales de Liénard-Wiechert? A partir de qué caso general se deducen? (no se precisa deducción matemática)

---

**PROBLEMAS:** Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

**PROBLEMA 1** Un cilindro metálico con conductividad no nula, de radio  $a$  e indefinido en la dirección  $z$  tiene una rendija longitudinal en  $\varphi = \pi$  como muestra la figura 1, y lleva una corriente en la dirección azimutal que da lugar a un potencial que varía con el ángulo azimutal en la forma:  $V(a, \varphi) = (V_o \varphi) / (2\pi)$  para  $-\pi < \varphi < \pi$ . Encuentre el potencial en el interior del cilindro.

**PROBLEMA 2** Determine el potencial sobre el eje  $Z$  debido a un anillo de radio  $a$  uniformemente cargado con una densidad lineal de carga  $\lambda_o$  que se encuentra en el interior de una esfera de radio  $b$ ,  $b > a$ , conectada a tierra. El anillo es concéntrico a la esfera.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# FORMULARIO

## 1. Operadores diferenciales vectoriales

### Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi$$

### Divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

### Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r \mathbf{u}_\theta & (r \sin \theta) \mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & r A_\theta & (r \sin \theta) A_\varphi \end{vmatrix}$$

## 2. Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_o \mathbf{J} \quad ; \quad \nabla^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

## 3. Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)]$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos(n\pi x/L) dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

## 4. Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 5. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho \partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

a) Simetría axial con invarianza longitudinal:  $\phi = k_1 \ln \rho + k_2$

b) Invarianza longitudinal

$$\phi = (C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}) (A_1 \cos(n\varphi) + A_2 \sin(n\varphi))$$

o bien, si  $n = 0$ :

$$\phi = (k_1 \ln \rho + k_2) (A_1 \varphi + A_2)$$

c) Simetría axial

$$\phi = (B_1 J_0(k\rho) + B_2 N_0(k\rho)) (A_1 \sinh(kz) + A_2 \cosh(kz))$$

ó

$$\phi = (C_1 I_0(k\rho) + C_2 K_0(k\rho)) (D_1 \sin(kz) + D_2 \cos(kz))$$

## 6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

a) Asimetría total

$$\phi = \left( A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \right) (A_1 \sin(m\varphi) + A_2 \cos(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta)$$

b) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left( A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$

## 7. Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{\gamma x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad ; \quad K_0(x) = N_0(jx)$$

## 8. Polinomios de Legendre

1 [ d ]<sup>n</sup>

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70