

ELEMENTOS DE TOPOLOGÍA

(grupo D)

Julio 2007

I) 1) Enunciar y demostrar el Lema del número p de Lebesgue.

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$.

II) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $A, B \subset X$. Probar:

$$A \cup B = X \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = X \quad \text{y}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset; \quad \text{Se verifican las recíprocas?}$$

2) Sean $(X, T), (Y, S)$ espacios topológicos conexos, $A \subset X, B \subset Y$. Probar que $X \times Y \setminus (A \times B)$ es conexo.

III) Sean C_1 y C_2 dos circunferencias concéntricas de \mathbb{R}^2 . Sea $X = C_1 \cup C_2$ y T la topología en X que tiene como subbase los arcos abiertos de C_2 y los arcos abiertos de C_1 junto con su proyección desde el centro común sobre C_2 , excluido el punto medio.

Probar que (X, T) es compacto y T_2 la inclusión de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

(grupo C)

Junio 2000

Lupión

I) 1) Sean $(X, T), (Y, S)$ espacios topológicos, A compacto, $A \subset X$, B compacto, $B \subset Y$, $A \times B \subset W$ abierto de $X \times Y$. Entonces existen abiertos U, V de (X, T) e (Y, S) respectivamente, $A \times B \subset U \times V \subset W$.

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$.

II) 1) Sea (X, T) un espacio topológico, $p \in X$. Probar que son equivalentes

(a) $\{p\} \in T$

(b) Para todo espacio (Y, S) , toda aplicación $f: X \rightarrow Y$ es continua en p .

(c) Toda aplicación $f: (X, T) \rightarrow (X, T_D)$ es continua en p . (T_D es la top. discreta)

2) Probar que un espacio en el que todo abierto no vacío es denso, no es T_2 . Dar un ejemplo de un espacio T_1 con esta propiedad

3) Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de espacios topológicos y $a = (a_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$. Si C_a es la componente de a en $\prod_{j \in J} X_j$ y C_{a_j} la componente de a_j en X_j ($a_j \in J$), probar que $C_a = \prod_{j \in J} C_{a_j}$.

II) 1) Sobre \mathbb{R} consideramos $\forall x \in \mathbb{R}$ la familia

$\mathcal{N}_x = \{N \subset \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset N\}$; Es \mathcal{N}_x sistema de entornos de x en algún espacio topológico?

2) En \mathbb{R}^2 , sean $\mathcal{G}_1 = \{r_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ donde $r_x = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \cup \{S\}$, $S = \{(t, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Denotamos $T(\mathcal{G}_1)$ y $T(\mathcal{G}_2)$ las topologías engendradas por \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 respectivamente. Dado

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

1 - D (05)

ELEMENTOS GEOM. DIF. Y TOPOLOGIA

(grupo B) Septiembre 1999. LUPIANEZ

I) 1) Sean $(X, T), (Y, S)$ espacios topológicos, $A \times B$ compacto de $X \times Y$ tal que $A \times B \subset W$ abierto de $X \times Y$, entonces existen abiertos U, V de (X, T) e (Y, S) respectivamente tales que $A \times B \subset U \times V \subset W$.

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$.

II) 1) Sea U abierto en (X, T) . Probar que $U \cap \bar{A} \subset \overline{U \cap A}$ para todo subconjunto $A \subset X$. Dar un ejemplo en el que no se verifique la igualdad. Probar que si D es denso en (X, T) , $U \subset \overline{U \cap D}$ y $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.

2) Sobre el intervalo $[0, 1)$ consideramos la relación de orden natural y $j: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ inclusión. Estudiar la convergencia de la red j en (\mathbb{R}, T_u) . Analizo problema si el intervalo es el $[0, 1]$.

3) Sea (X, T) espacio topológico, $\forall A \subset X$ la función característica de A es $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$. $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$. Probar que χ_A es continua si y sólo si A es abierto y cerrado.

4) Probar que $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ es abierto en $X \times X$ con la topología producto si y sólo si X es un espacio discreto.

5) Sea $X = [0, 2]$ con la topología usual relativa y $A = (1, 2]$. Estudiar si X/A es T_2 .

III) Determinar si son homeomorfos los siguientes subespacios de \mathbb{R}^2 :

a) $A = ([0, \infty) \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{I})$

b) $B = (\mathbb{I} \times \{1\}) \cup (\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{I}) \cup (\{0\} \times \mathbb{I})$

c) $C = (\mathbb{I} \times \{1\}) \cup (\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{I})$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

ELEMENTOS DE GEOM. DIF. Y TOPOLOGIA

(grupo B)

Febrero 1999

LUPIANA

I) 1) Sea $\{(X_j, T_j)\}_{j \in J}$ familia $\neq \emptyset$ de espacios topológicos $\neq \emptyset$. Entera $(\prod_{j \in J} X_j, \prod_{j \in J} T_j)$ es localmente compacto si y solo si (X_j, T_j) es compacto $\forall j \in J$ con J finito y (X_j, T_j) localmente compacto $\forall j \in J$.

2) Si f es un camino en S^1 con origen 1, existe un único camino \tilde{f} en \mathbb{R} con origen 0 tal que $\varphi \circ \tilde{f} = f$ ($\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$)

II) 1) En cada una de las nociones o propiedades que se indican a continuación, indicar razonadamente las que se conservan por aplicaciones continuas; punto adherente, entorno, abierto, T_2 .

2) Sea \mathbb{Q} con el orden natural. Encontrar los puntos límite y los puntos de acumulación de la red $s: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ (aplicación identidad)

3) Sea s red, \mathcal{F}_s filtro engendrado por s y $s_{\mathcal{F}_s}$ red engendrada por él; se verifica que $s = s_{\mathcal{F}_s}$? Razonar la respuesta.

4) ¿Puede existir alguna aplicación continua e inyectiva de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} ?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL Y TOPOLOGIA
(grupos E y F) Septiembre 1998 LOPIANEZ

I) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $x \in X$ y s red en X . Entonces x es de aglomeración de s si, y sólo si, existe una subred de s que converge a x .

2) Enunciar y demostrar el Lema del número p de Lebesgue.

II) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $A \subset X$. Estudiar si $\text{Fr. } A$, $\text{Fr. } \bar{A}$ y $\text{Fr. } \dot{A}$ coinciden. En caso negativo, mostrarlo con contraejemplos, y estudiar los contenidos.

2) Sean $(X, T), (X', T')$ espacios topológicos y $f: X \rightarrow X'$ aplicación. Probar que: f es continua y cerrada si, y sólo si, $\forall M \subset X$
 $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

TOPOLOGIA I (Secc. Astronomia, Geodesia y Mecánica)

CONVOCATORIA DE JUNIO 1997

[1er parcial]

I) Sea X conjunto, \mathcal{F} filtro en X . Entonces, \mathcal{F} es ultrafiltro si y solo si $\forall E \subset X$ o bien $E \in \mathcal{F}$ o bien $X \setminus E \in \mathcal{F}$

II) Probar que el conjunto derivado de la unión de los conjuntos A y B es la unión de los conjuntos derivados de A y B .

III) Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se considera la familia de subconjuntos de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{D}((x, y)) = \{B_r((x, 0)) \cup \{(x, y)\} \mid r > 0\}$ donde $B_r((x, 0))$ es la bola euclídea de centro $(x, 0)$ y radio r . Probar que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}((x, y))$ es base de entornos de (x, y) para alguna topología T sobre \mathbb{R}^2 . Estudiar los axiomas de numerabilidad y de separación de (\mathbb{R}^2, T) .

TOPOLOGIA I (Secc. Astronomia, Geodesia y Mecánica)

CONVOCATORIA DE JUNIO 1997

[2º parcial]

I) Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f_1, g_1: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas y homeomorfismos, $f_2, g_2: Y \rightarrow Z$ aplicaciones continuas y homeomorfismos. Entonces, $f_2 \circ f_1$ y $g_2 \circ g_1$ son homeomorfismos.

II) Sea X un espacio conexo tal que cada punto suyo tiene algún entorno conexo. Probar que entonces X es conexo por...

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

TOPOLOGIA I, Secc. Astronomia, Geodesia y Mecanica

1er parcial

(3-II-1997)

I) 1) Un espacio topológico es T_3 si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de algún cubo (\equiv producto de copias del intervalo unidad).

2) Todo espacio topológico metrizable es T_4 .

II) 1) ¿Es toda aplicación biyectiva continua un homeomorfismo? Justificar la respuesta

2) Sean X, Y espacios topológicos $f: X \rightarrow Y$ aplicación, $x_0 \in X$. Si para todo filtro \mathcal{F} de X tal que $\mathcal{F} \rightarrow x_0$ se tiene que $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x_0)$, probar que f es continua en x_0 .

3) Sean X, Y espacios topológicos $f: X \rightarrow Y$ aplicación. Probar que f es continua si, y sólo si, la aplicación $g: X \rightarrow G_f$ es un homeomorfismo.
$$x \mapsto (x, f(x))$$

4) Sea X conjunto, T, T' topologías en X , si $(X, T \cap T')$ es espacio T_2 probar que la diagonal Δ es un cerrado en $(X, T) \times (X, T')$.

III) Sean X, Y espacios topológicos, M cerrado en X , $f: M \rightarrow Y$ aplicación continua. En $X \cup Y$ se considera la relación de equivalencia R que consiste en identificar cada punto $y \in f(M)$ con todos los puntos $x \in f^{-1}(y)$, las clases definidas por $x \in X - M, y \in Y - f(M)$ consisten sólo en un punto.

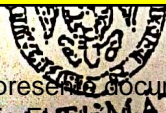
$\therefore \dots \therefore X \cup_f Y \equiv X \cup Y / R, q: X \cup Y \rightarrow X \cup_f Y$ es la proyección continua. Probar que q es cerrada si, y sólo si, f es cerrada.

2) Sobre el segmento $[-1, 1]$ se considera la topología engendrada por los conjuntos de la forma $[-1, b)$ para $b > 0$ y $(a, 1]$ para $a < 0$. Estudiar los axiomas de separación y de numerabilidad en este

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



TOPOLOGIA I (Secc. Astronomía, Geodesia y Mecánica)
2º parcial (curso 1996-97)

- I) 1) Enunciar y demostrar el Teorema de Baire para un espacio localmente compacto
2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces $\Pi_1(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\Pi_1(X, a) \times \Pi_1(Y, b)$.

II) 1) Sea X un espacio compacto T_2 con un único punto no aislado x . Probar que entonces si un conjunto U cumple $U \ni x$, se tiene que U es abierto si y solo si $X \setminus U$ finito

2) ¿Es posible que exista alguna aplicación continua e inyectiva de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} ?

3) Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento localmente finito de un espacio X y A un subconjunto compacto de X . Probar que existe un abierto G que contiene a A y solo corta a un número finito de conjuntos de \mathcal{U} .

4) Sean las propiedades "conexo por arcos" y "contractil". Mostrar que solo se verifica que una de las propiedades implica la otra y dar un contraejemplo de que la otra implicación es falsa

III) Determinar si son homeomorfos los siguientes subespacios de \mathbb{R}^2 .

a) $A = ([0, \frac{1}{2}) \times \{1\}) \cup (\mathbb{N} \times I)$

b) $B = (I \times \{1\}) \cup (\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}) \times I) \cup (\{0\} \times I)$

c) $C = (I \times \{1\}) \cup (\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}) \times I)$

d) $D = (I \times \{1\}) \cup (\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}) \times I) \cup (\{0\} \times \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N})$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

(grupo A)

Febrero 2005

Lyciáres

I) 1) Sea X conjunto no vacío. Si $\forall x \in X \mathcal{V}(x)$ familia de conjuntos

cumpliendo

a) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in U$

b) $U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{V}(x)$

c) $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ " } \forall y \in V \ U \in \mathcal{V}(y)$

d) $U \in \mathcal{V}(x), V \supset U \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$

entonces existe una topología T para X tal que el sistema de entornos de cada punto de (X, T) es $\mathcal{V}(x)$

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces los grupos: $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ y $\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$ son isomorfos.

II) 1) Sea (X, T) espacio topológico, $A, B \subset X$. Probar: $A \cup B = X \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = X$
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$: Se verifican las implicaciones...

DELEGACIÓN DE ALUMNOS DE



DE MATEMÁTICAS

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2) Sea X un espacio topológico. Probar que X es conexo si y sólo si $\forall x, y \in X, \exists M \subset X, M$ conexo, $x, y \in M$.

III) Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $B_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

a) Probar que $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ es base de alguna topología T sobre \mathbb{R}^2

b) Estudiar las axiomas de numerabilidad de (\mathbb{R}^2, T) , las propiedades T_i , regular y normal.

c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0\}$. Determinar en adherencia e interior en (\mathbb{R}^2, T)

TOPOLOGÍA ELEMENTAL

(grupo B)

Febrero 2013

I)

1) Enunciar y demostrar el Teorema de Base para espacios localmente compactos

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces $\pi_i(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\pi_i(X, a)$ o $\pi_i(Y, b)$

II)

1) Sean X, Y espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ aplicación.

Demstrar que son equivalentes:

a) $f: X \rightarrow Y$ es aplicación cerrada

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

2) Sea X un espacio topológico. Probar que X es conexo si y sólo si $\forall x, y \in X, \exists M \subset X, M$ conexo, $x, y \in M$.

III) Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $B_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$

a) Probar que $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ es base de alguna topología T sobre \mathbb{R}^2

b) Estudiar los axiomas de numerabilidad de (\mathbb{R}^2, T) , las propiedades T_1 , regular y normal.

c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0\}$. Determinar su adherencia e interior en (\mathbb{R}^2, T)

TOPOLOGÍA ELEMENTAL

(grupo B)

Febrero 2013

I)

1) Enunciar y demostrar el Teorema de Base para espacios localmente compactos

2) Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X, b \in Y$. Entonces $\pi_c(X \times Y, (a, b))$ es isomorfo a $\pi_c(X, a) \times \pi_c(Y, b)$

II)

1) Sean X, Y espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ aplicación. Demostrar que son equivalentes:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70