Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:**

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

31/10/2016

Primer parcial

Instrucciones:

- En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
- Calificación del test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico.
- Tiempo: 2 horas (una hora cada parte).

TEST (20 %)

Si un tableau de F tiene todas sus ramas abiertas entonces F

a) Es tautología. b) No es contradicción. c) Es contingente.

B

Un contraejemplo de una estructura deductiva es

a) Un no modelo de la conclusión.
b) Un no modelo tanto de la conclusión como de las premisas.
c) Un no modelo de la conclusión que además es modelo de todas las premisas.

C

En el dominio de las personas, con los predicados $P(x)$ = "x es un pintor", $E(x)$ = "x es escultor" y $A(x,y)$ = "x es amigo de y", el enunciado: "Todos los pintores tienen amigos escultores" se formaliza así:

a) $\forall x \exists y \big(P(x) \rightarrow A(x,y) \land E(y)\big)$
b) $\exists y \forall x \big(P(x) \rightarrow A(x,y) \land E(y)\big)$
c) $\forall x \exists y \big(P(x) \land A(x,y) \land E(y)\big)$

A

El número de subfórmulas distintas de la fórmula $p \lor \neg p \rightarrow p \land \neg p$ es

a) 5. b) 6. c) 9.

A

El conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow q,\ p \lor s,\ Z\}$ es insatisfactible si

a) $Z = \neg p \land \neg q$ b) $Z = \neg s \land p$ c) $Z = \neg s \land \neg q$

C

La fórmula $\neg \forall x \big(P(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$ es equivalente a

a) $\forall x \big(P(x) \land Q(x)\big)$
b) $\exists x \big(P(x) \land Q(x)\big)$
c) $\exists x \big(\neg P(x) \lor \neg Q(x)\big)$

B

DEFINICIONES (10 %)

---

1. Definir tautología.

SOLUCIÓN: Una tautología es una fórmula que solo tiene modelos, es decir, no admite no modelos.

2. Justificar que si F es tautología entonces F no es contingente.

SOLUCIÓN: Una fórmula contingente es aquella que tiene al menos un modelo y un no modelo. Si F es tautología entonces no admite no modelos, por tanto no puede ser contingente.

EJERCICIOS (30 %)

Ejercicio 1. Probar mediante equivalencias elementales que

$$F = (p \to q) \land (p \lor q) \to q$$

es equivalente a una constante lógica.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} F = (p \to q) \land (p \lor q) \to q &\overset{(1)}{\equiv} (\neg p \lor q) \land (p \lor q) \to q \\ &\overset{(2)}{\equiv} (\neg p \land p) \lor q \to q \\ &\overset{(3)}{\equiv} \bot \lor q \to q \\ &\overset{(4)}{\equiv} q \to q \\ &\overset{(1)}{\equiv} \neg q \lor q \\ &\overset{(3)}{\equiv} \top \end{aligned}$$

Donde las equivalencias elementales usadas han sido:

(1) $A \to B \equiv \neg A \lor B$

(2) Distributiva

(3) Complementario ($\neg A \land A \equiv \bot,\ \neg A \lor A \equiv \top$)

(4) Unidad ($\bot \lor A \equiv A$)

Ejercicio 2. Probar mediante reglas de inferencia que la siguiente estructura deductiva es correcta.

$$\begin{array}{c} \forall x\,\big(P(x)\vee Q(x)\to R(x)\big) \\ \neg\forall x\,R(x) \\ \hline \exists x\,\neg P(x) \end{array}$$

Solución: Por derivación:

P_1.	$\forall x\,\big(P(x)\vee Q(x)\to R(x)\big)$	
P_2.	$\neg\forall x\,R(x)$	
1.	$\exists x\,\neg R(x)$	Equivalente a P_2.
2.	$\exists x\,\neg\big(P(x)\vee Q(x)\big)$	Por Modus Tollens aplicado a P_1 y a 1.
3.	$\exists x\,\big(\neg P(x)\wedge\neg Q(x)\big)$	Equivalente a 2 por las leyes de De Morgan.
4.	$\exists x\,\neg P(x)$	Por Simplificación en 3.

Ejercicio 3. Formalizar en lógica de proposiciones el razonamiento que aparece en el siguiente texto extraído de un manual de cirugía:

“En este punto el cirujano o conecta la válvula y deja bloqueada la circulación sanguínea, o sigue operando lo más rápidamente que pueda. Si opta por la primera opción, dispone de tiempo para suturar, pero existe riesgo de necrosis. Si opta por operar rápidamente, no hay riesgo de necrosis. Ahora bien, por experiencia sabemos que si la edad del paciente es elevada, el riesgo de necrosis aumenta y la segunda opción es la apropiada. Luego, si el paciente tiene más de 80 años, el cirujano no debe emplear el primer método.”

Solución: Con la siguiente asignación de variables proposicionales:

p: “El cirujano conecta la válvula”
q: “El cirujano deja bloqueada la circulación sanguínea”
r: “El cirujano sigue operando lo más rápidamente que pueda”
s: “El cirujano dispone de tiempo para suturar”
t: “Existe riesgo de necrosis”
u: “La edad del paciente es elevada”

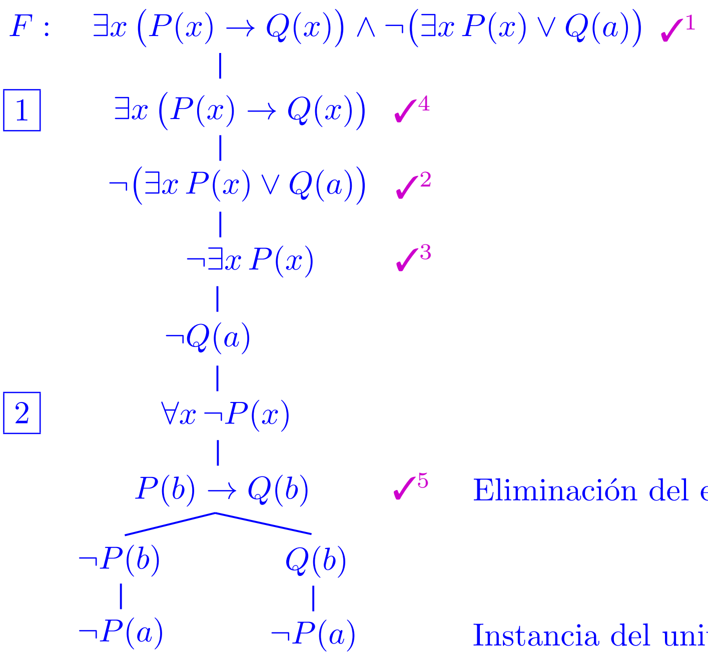
La formalización del razonamiento queda así:

$$\begin{array}{rl} P_1: & (p\wedge q)\vee r \\ P_2: & p\wedge q\to s\wedge t \\ P_3: & r\to\neg t \\ P_4: & u\to t\wedge r \\ \hline Q: & u\to\neg(p\wedge q) \end{array}$$

Ejercicio 4. Utilizar el método del tableau para dar un modelo de la fórmula

$$F = \exists x\,\big(P(x) \to Q(x)\big) \wedge \neg\big(\exists x\, P(x) \vee Q(a)\big)$$

Solución: Aplicamos el método del tableau a F



Eliminación del existencial en $\boxed{1}$ con $x = b$

Instancia del universal en $\boxed{2}$ con $x = b$

y truncamos el proceso ya que vemos que no va a quedar cerrado. Para construir el modelo definimos las funciones booleanas asociadas a los predicados P y Q de modo que se satisfagan las fórmulas no marcadas de una rama abierta en el tableau (por ejemplo, la de la izquierda).

Modelo: Como aparecen dos constantes distintas, definimos un dominio con dos elementos.

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{d_1, d_2\} \\ a & = & d_1 \\ b & = & d_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} P : D & \longrightarrow & \{0,1\} \\ d_1 & \mapsto & 0 \\ d_2 & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} Q : D & \longrightarrow & \{0,1\} \\ d_1 & \mapsto & 0 \\ d_2 & \mapsto & 1 \text{ (o también valdría 0)} \end{array}$$

Apellidos:
Nombre: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐

Lógica y Matemática Discreta **Primer parcial** **31/10/16**

EU Informática
UPM

Notas:

- Tiempo para esta parte del examen: **1 hora**.
- **Justificar las respuestas**.

Problema 1 (20 %)

a) *(7 puntos)* Probar mediante reglas de inferencia que la siguiente estructura deductiva es correcta.

$$\begin{array}{c} p \to (\neg r \to q) \\ s \vee \neg q \\ r \vee s \to t \\ t \wedge r \to \neg p \\ \hline p \to s \end{array}$$

b) *(3 puntos)* Sin usar el método del tableau (ni por supuesto, tablas de verdad), justificar que el conjunto Φ es insatisfactible.

$$\Phi = \{\, p \to (\neg r \to q),\ s \vee \neg q,\ r \vee s \to t,\ (p \wedge \neg s) \wedge (r \leftrightarrow t),\ t \wedge r \to \neg p \,\}$$

SOLUCIÓN:
a) Por reducción al absurdo, añadimos al conjunto de premisas la negación de la conclusión: $\neg Q$, y buscamos obtener $\bot$.

1.	$\neg Q = \neg(p \to s) \equiv p \wedge \neg s$	Por negación de un condicional.
2.	$p \wedge \neg s \Rightarrow p,\ \neg s$	Por Simplificación.
3.	$p,\ p \to (\neg r \to q) \Rightarrow \neg r \to q,\ \neg s$	Por Modus Ponens.
4.	$\neg s,\ s \vee \neg q \Rightarrow \neg q$	Por Silogismo Disyuntivo.
5.	$\neg q,\ \neg r \to q \Rightarrow r$	Por Modus Tollens.
6.	$r \Rightarrow r \vee s$	Por Adición.
7.	$r \vee s,\ r \vee s \to t \Rightarrow t$	Por Modus Ponens.
8.	$t,\ r \Rightarrow t \wedge r$	Por Conjunción.
9.	$t \wedge r,\ t \wedge r \to \neg p \Rightarrow \neg p$	Por Modus Ponens.
10.	$\neg p,\ p \Rightarrow \neg p \wedge p$	Por Conjunción.
11.	$\neg p \wedge p \equiv \bot$	Por Ley del Complementario.

Como de las premisas junto con la negación de la conclusión se deriva una contradicción, la estructura deductiva es correcta.

b) El conjunto dado está formado por fórmulas relacionadas con la estructura deductiva (ED) anterior. Concretamente es

$$\Phi = \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ F,\ P_4\}$$

donde P_1, P_2, P_3 y P_4 son todas las premisas de la ED anterior y $F = (p \wedge \neg s) \wedge (r \leftrightarrow t)$.

El conjunto Φ es satisfactible si y solo si existe una valoración V que es modelo común de todas sus fórmulas. En particular, debe hacer verdadera la fórmula F, lo que a su vez que implica que debe hacer verdaderas tanto a $A = p \wedge \neg s$ como a $B = r \leftrightarrow t$ ya que $F = A \wedge B$.

En consecuencia, Φ es satisfactible si y solo si $\Phi' = \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ A,\ B,\ P_4\}$ es satisfactible.

Además, $A = p \wedge \neg s \equiv \neg(p \rightarrow s) = \neg Q$.

Luego Φ' es satisfactible si y solo si $\Phi'' = \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ \neg Q,\ B,\ P_4\}$ es satisfactible.

Por otro lado, como sabemos del apartado anterior que $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4 \Rightarrow Q$ es correcta, se tiene que el conjunto de fórmulas $\{P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \neg Q\}$ es insatisfactible.

Si a un conjunto de fórmulas insatisfactible se le añade otra fórmula sigue siendo insatisfactible.

Luego $\Phi'' = \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \neg Q\} \cup \{B\}$ es insatisfactible y por tanto el conjunto dado Φ también.

Apellidos:
Nombre: **Iniciales 1^{er} apellido:** ☐☐☐

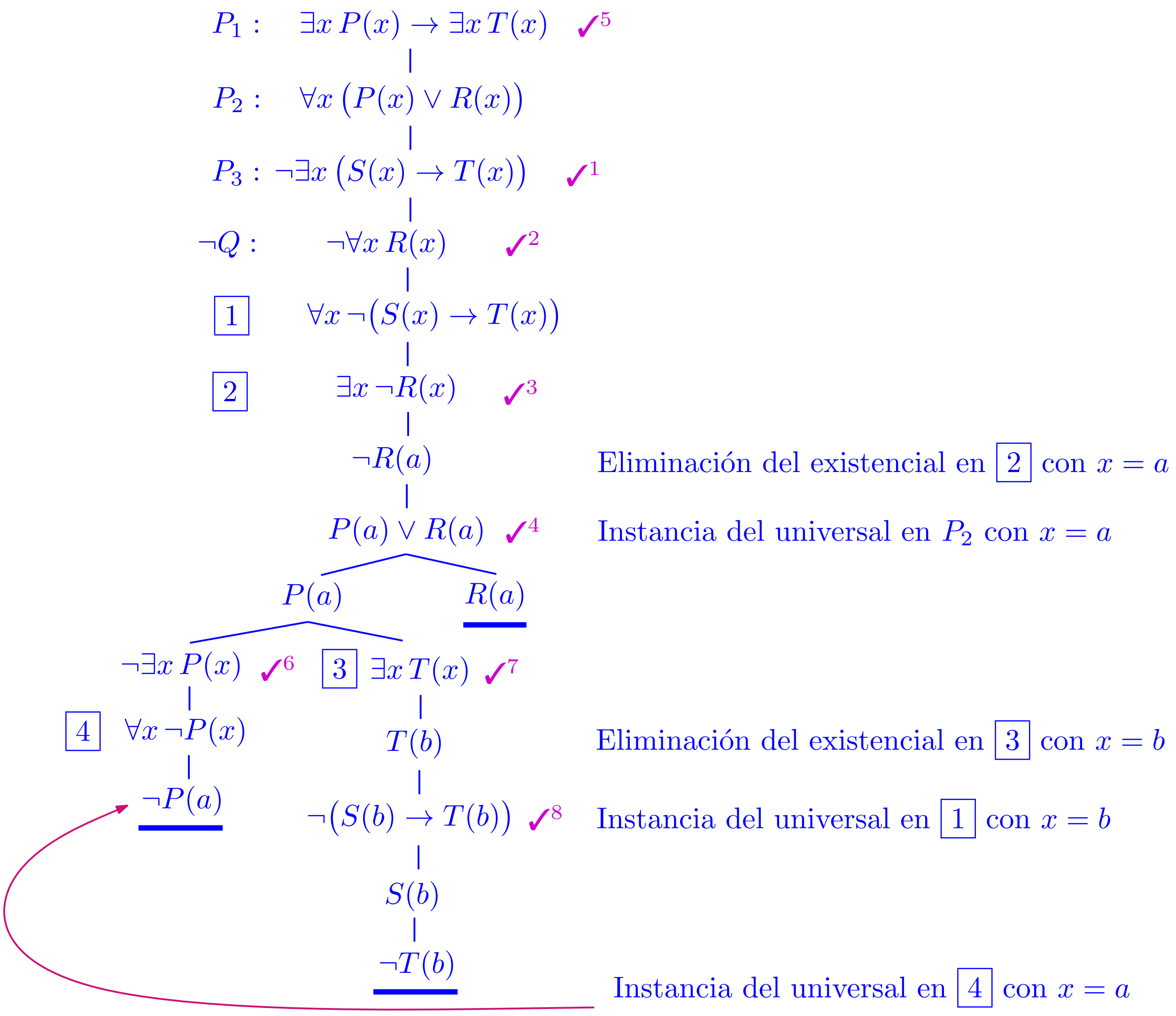
Lógica y Matemática Discreta **Primer parcial** **31/10/16**

Problema 2 (20 %)

Usar el método del tableau para probar que la siguiente estructura deductiva es correcta.

$$\begin{array}{c} \exists x\, P(x) \to \exists x\, T(x) \\ \forall x\, \big(P(x) \vee R(x)\big) \\ \neg\exists x\, \big(S(x) \to T(x)\big) \\ \hline \forall x\, R(x) \end{array}$$

Solución: Aplicamos el método del tableau al conjunto formado por las premisas y la negación de la conclusión:



Como $\text{tableau}(\{P_1, P_2, P_3, \neg Q\})$ es cerrado, la estructura deductiva es correcta.