Apellidos: **Iniciales 1^{er} apellido:**

Nombre:

ETSISI
UPM

Lógica y Matemática Discreta

12/1/2018

Tercer parcial

Instrucciones:

- En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones a), b) y c) es cierta.
- Calificación del test: acierto $= +1$, fallo $= -0'5$ y blanco $= 0$.
- Calificación de las definiciones: sobre 1 punto; y de los ejercicios: sobre 3 puntos.
- Tiempo para esta parte del examen: **2 horas.**
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico a lo largo de todo el examen.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en el tablón y en *Moodle*.
- **Justificar todas las respuestas en los 4 ejercicios y los 2 problemas**.

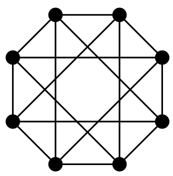
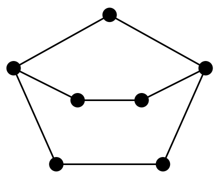
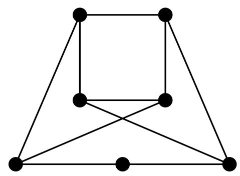
TEST

En el conjunto de cadenas de bits de longitud 3 se considera la relación de equivalencia definida del siguiente modo: *una cadena está relacionada con otra si y solo si tienen la misma cantidad de unos.* Entonces, el conjunto cociente tiene

a) dos elementos. b) tres elementos. c) cuatro elementos.

C

¿Cuál de los siguientes grafos **no** es hamiltoniano?

a)  b)  c) 

B

En $\mathbb{Z}_{12}$, la clase de 5 contiene al número:

a) 15 b) 29 c) 40

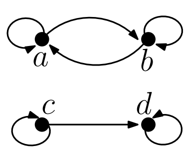
B

Si se ponderan todas las aristas del grafo $K_{3,4}$ con peso 1, se verifica que hay:

a) 3 medianas. b) 4 medianas. c) 7 medianas.

A

El diagrama sagital de una relación $\mathcal{R}$ definida sobre $A = \{a, b, c, d\}$ es



Entonces $\mathcal{R}$

a) es de equivalencia.
b) es de orden.
c) no es de equivalencia ni de orden.

C

Si G es un grafo sin ciclos con 20 vértices y 12 aristas, entonces el número de componentes conexas de G es

a) 16. b) 8. c) depende del grafo G.

B

DEFINICIONES

1. Definir mínimo en un conjunto ordenado $(A, \preceq)$.

Es un elemento m de A tal que $m \preceq a$, para todo $a \in A$.

2. Definir ciclo hamiltoniano en un grafo G.

Es un ciclo que pasa por todos los vértices de G.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. En el conjunto de las palabras de tres bits se define la relación binaria R:

$$a\,R\,b \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ y } b \text{ comparten una subcadena de longitud } 2$$

Justificar si R es transitiva o no.

SOLUCIÓN: Veamos si para a, b, c, cadenas de tres bits cualesquiera, se verifica que

$$a\,R\,b \text{ y } b\,R\,c \;\Rightarrow\; a\,R\,c.$$

La respuesta es que no porque las palabras 110, 010 y 001 verifican lo siguiente:

$110\,R\,010$ (comparten la subcadena 10) y $010\,R\,001$ (comparten 01) pero $110 \not{R}\, 001$.

Por tanto, R no es transitiva.

Ejercicio 2. Sea A el conjunto de los números naturales de dos cifras. Se considera en A la siguiente relación de equivalencia R:

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad \text{el producto de las cifras de } x \text{ coincide con el producto de las cifras de } y$$

a) *(1 punto)* Describir la clase de 10 y dar su cardinal.

b) *(2 puntos)* Hallar una clase que tenga un solo elemento y otra que tenga exactamente dos.

SOLUCIÓN: En $A = \{10, 11, 12, 13, \ldots, 99\}$, con la relación de equivalencia dada,

$$\begin{aligned}[10] &= \{x \in A \,/\, \text{ el producto de las cifras de } x \text{ es } 0\} \\ &= \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}\end{aligned}$$

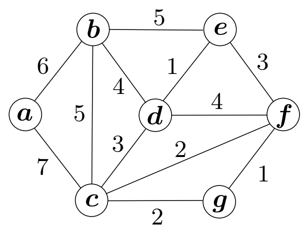
Una clase con un solo elemento: $[11] = \{ab \in A \,/\, a \cdot b = 1\} = \{11\}$

(O también $[99], [88], [77]$ y $[55]$).

Una clase con dos elementos: $[12] = \{ab \in A \,/\, a \cdot b = 2\} = \{12, 21\}$.

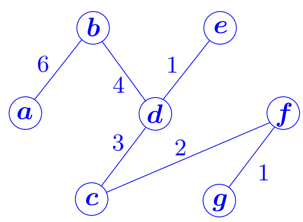
(Ocurre eso mismo con $[1b]$ donde b es un número primo de una cifra.)

Ejercicio 3. Se considera el siguiente grafo.



a) *(2 puntos)* Aplicar el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol generador (o recubridor) de peso mínimo. Hallar su peso e indicar el orden en que han sido elegidas las aristas.

SOLUCIÓN: Para obtener un árbol recubridor de peso mínimo basta, según el algoritmo de Kruskal, ir eligiendo aristas de menor peso evitando que se formen ciclos, hasta completar un total de aristas igual al número de vértices menos 1: $7 - 1 = 6$.

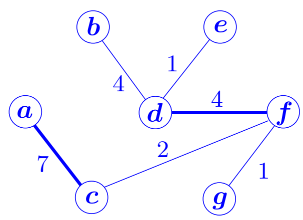


El orden en que han sido elegidas las aristas del árbol ha sido: gf, de, cf, cd, db, ab.
Y el peso del árbol recubridor T es:

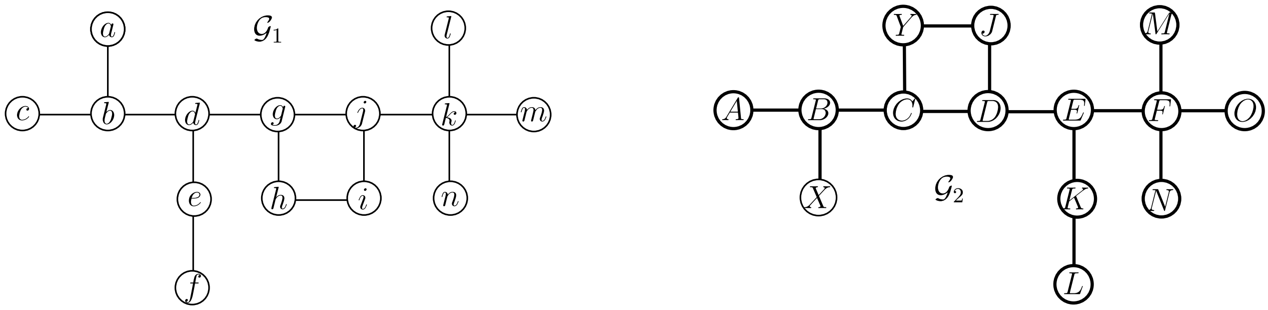
$$w(T) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 17$$

b) *(1 punto)* Dar el árbol generador de peso mínimo si las aristas ac y df han de estar en dicho árbol.

SOLUCIÓN: Seguimos un procedimiento semejante al anterior, solo que contamos como ya seleccionadas las aristas ac y df y solo tenemos que elegir 4 tomando las de menor peso que no formen ciclos con las ya elegidas.

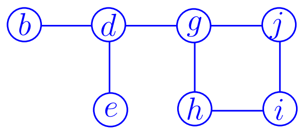


Ejercicio 4. Estudiar si los grafos de la figura son isomorfos.

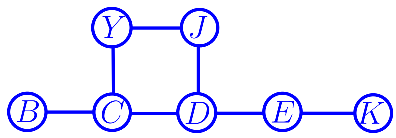


SOLUCIÓN: En cada uno de estos grafos se consideran los subgrafos inducidos por los vértices de grado 2 y 3:

$\mathcal{G}_1' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_1} \,/\, g(v) = 2 \text{ ó } 3\rangle$

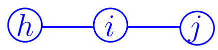


$\mathcal{G}_2' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_2} \,/\, g(v) = 2 \text{ ó } 3\rangle$



Y ahora se considera los subgrafos inducidos por los vértices de grado 2 en $\mathcal{G}_1'$ y en $\mathcal{G}_2'$:

$\mathcal{G}_1'' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_1'} \,/\, g(v) = 2\rangle$



$\mathcal{G}_2'' = \langle v \in V_{\mathcal{G}_2'} \,/\, g(v) = 2\rangle$

Evidentemente, $\sec(\mathcal{G}_1'') = [2, 1, 1] \neq \sec(\mathcal{G}_2'') = [1, 1, 0]$.

Luego $\mathcal{G}_1'' \not\approx \mathcal{G}_2''$, y en consecuencia $\mathcal{G}_1' \not\approx \mathcal{G}_2'$ que a su vez implica que $\mathcal{G}_1 \not\approx \mathcal{G}_2$.

Problema 1 (15%)

En el conjunto $A = \{a, b\} \times \{0, 2, 3, 6, 8\}$ se define la siguiente relación de orden:

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq_{Lex} x' \text{ y también } y \,|\, y'$$

a) *(2 puntos)* Probar que el orden $\preceq$ es parcial.

Solución: Es de orden parcial porque hay elementos no comparables en A. Por ejemplo: $(a, 2)$ y $(b, 3)$.

En efecto,

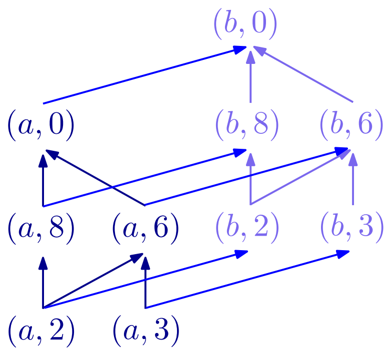
$$(a, 2) \not\preceq (b, 3) \quad \text{ya que } 2 \not| \, 3.$$
$$\text{y}$$
$$(b, 3) \not\preceq (a, 2) \quad \text{ya que } b \not\leq_{Lex} a.$$

b) *(5 puntos)* Dibujar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, \preceq)$.

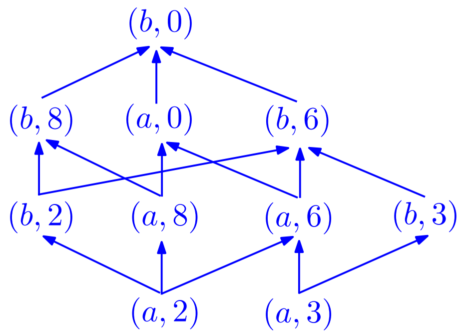
Solución: Se trata de ver la relación de precedencia de los elementos de

$$A = \{(a, 0), (a, 2), (a, 3), (a, 6), (a, 8), (b, 0), (b, 2), (b, 3), (b, 6), (b, 8)\}$$

Y es la que está reflejada en el siguiente diagrama de Hasse.



o lo que es lo mismo:



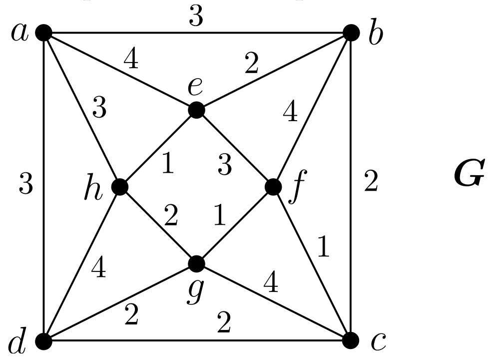
c) *(3 puntos)* Hallar razonadamente los elementos notables de $(A, \preceq)$.

Solución: A la vista del diagrama de Hasse podemos concluir lo siguiente:

- $(b, 0)$ es máximo porque es mayor o igual que todos los elementos de A. Al haber máximo, solo hay un maximal: él mismo.
- $(a, 2)$ y $(a, 3)$ son minimales ya que no hay elementos menores que ellos. Al haber más de un minimal, no hay mínimo.

Problema 2 (25%)

En el grafo G se representan las plazas de un barrio de una ciudad y las calles que las unen. El peso de las aristas indica el tiempo en minutos que se tarda en recorrer las calles correspondientes.



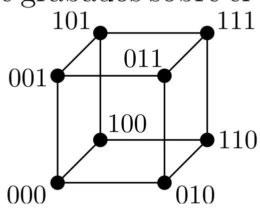
a) *(1 punto)* En las fiestas del barrio es costumbre adornar cada una de las plazas de un color. ¿Puede hacerse con solo dos colores de forma que dos plazas adyacentes tengan colores distintos?

SOLUCIÓN: Podrá hacerse si y solo si G es bipartito, pero no lo es porque tiene ciclos de longitud impar, concretamente de longitud 3: a, b, e, a, por ejemplo.

b) *(2 puntos)* Para el servicio de limpieza se utiliza una máquina barredora que parte de la plaza d. ¿Puede establecerse un circuito para la máquina barredora que pase exactamente una vez por cada calle y vuelva al punto inicial? Si es así, darlo.

SOLUCIÓN: Como el objetivo es recorrer mediante un circuito todas las aristas de G una sola vez, se trata de ver si G es euleriano. Como es un grafo conexo y todos sus vértices son de grado par (es regular de grado 4), G es euleriano. Un posible circuito euleriano es: $a, b, c, d, a, h, d, g, c, f, b, e, f, g, h, e, a$ y da una forma de limpiar todas las calles pasando por cada una de ellas una sola vez y volviendo al punto de partida.

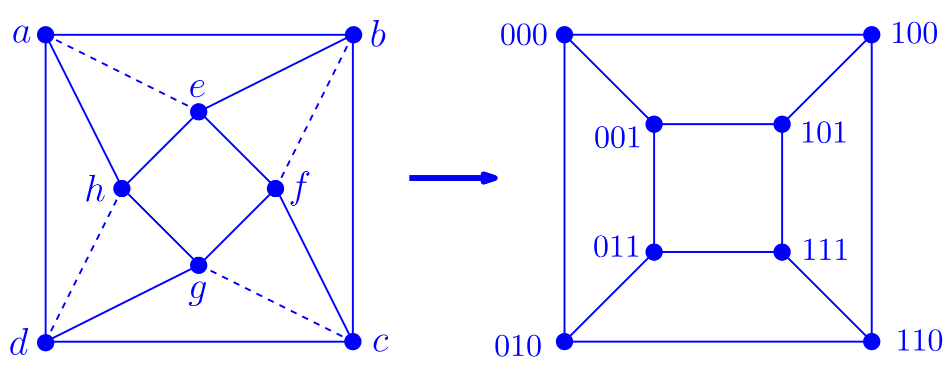
c) *(2 puntos)* En un concurso de grabados sobre el barrio, el ganador ha representado una parte del barrio como un cubo:



Indicar qué plazas se corresponden con los vértices del cubo y las aristas de G que no están representadas.

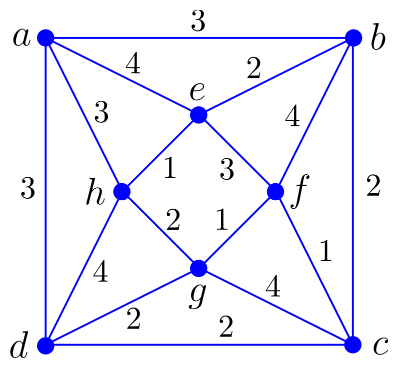
SOLUCIÓN: Se trata de ver que en G hay un subgrafo, obtenido eliminando aristas, que sea isomorfo a Q_3. Un posible isomorfismo entre el subgrafo $G - \{ae, dh, gc, fb\}$ y Q_3 es F definido del siguiente modo:

$F(a) = 000$
$F(d) = 010$
$F(c) = 110$
$F(b) = 100$
$F(h) = 001$
$F(g) = 011$
$F(f) = 111$
$F(e) = 101$



d) *(3'5 puntos)* En un panel informativo se indican las siguientes distancias (medidas en tiempo) entre las plazas del barrio. Usar las propiedades de la distancia y el algoritmo de Dijkstra para completar la tabla de distancias.

SOLUCIÓN: Aplicamos el algoritmo de Dijkstra desde g para hallar las distancias desde ese vértice a los demás. Su ejecución queda reflejada en la siguiente tabla:



G

P	a	b	c	d	e	f	g	h
g	∞	∞	4	2	∞	**1**	**0**	2
f	∞	5	**2**	2	4	–	–	2
c	∞	4	–	**2**	4	–	–	2
d	5	4	–	–	4	–	–	**2**
h	5	4	–	–	**3**	–	–	–
e	5	**4**	–	–	–	–	–	–
b	**5**	–	–	–	–	–	–	–
a	–	–	–	–	–	–	–	–
$d(g,\cdot)$	5	4	2	2	3	1	0	2

La tabla que nos daban se completa con las distancias halladas y usando las propiedades de la distancia: $d(u,v) = d(v,u)$ y $d(u,u) = 0$ para todo u, v, quedando como sigue.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	3	5	3	4	6	5	3
b	3	0	2	4	2	3	4	3
c	5	2	0	2	4	1	2	4
d	3	4	2	0	5	3	2	4
e	4	2	4	5	0	3	3	1
f	6	3	1	3	3	0	1	3
g	5	4	2	2	3	1	0	2
h	3	3	4	4	1	3	2	0

e) *(1'5 puntos)* ¿En qué plaza se debería colocar un coche de policía de tal modo que pueda atender una emergencia en cualquiera de las plazas del barrio en el menor tiempo posible?

SOLUCIÓN: La plaza en la que debe colocarse debe tener la propiedad de que el coche de policía pueda ir lo más rápidamente a cualquier plaza donde surja una eventual emergencia. Luego será en el vértice del grafo que minimice la distancia al vértice más alejado, esto es, en un centro del grafo.
A partir de la tabla de distancias anterior, hallamos el radio de cada vértice:

	a	b	c	d	e	f	g	h
$r(\cdot)$	6	4	5	5	5	6	5	4

En consecuencia, el radio de G es $r(G) = \min\{r(v) \,/\, v \in V_G\} = 4$ y los vértices b y h son centros, los lugares idóneos para colocar el coche de policía.