LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. **22/10/2018**

Apellidos y Nombre:...

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto, cada ejercicio sobre 3 puntos y cada problema sobre 10 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras ni móviles.
- Tiempo total para el examen: 2h
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en Moodle y en el tablón.

Preguntas de test (20%)

El número de subfórmulas distintas de la fórmula $\neg p \wedge \bot \rightarrow \neg q \vee p$ es:

a) 7 b) 8 c) 9

B

La interpretación I con dominio D = { d_1, d_2 } y funciones booleanas P: D → {0, 1} y Q : D → {0, 1} dadas por:

$$P(d_1) = 1, \quad P(d_2) = 1, \qquad Q(d_1) = 1, \quad Q(d_2) = 1, \qquad R(d_1) = 0, \quad R(d_2) = 1$$

es modelo de la fórmula F si:

a) $F = \forall x\, (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x))$
b) $F = \forall x\, (P(x) \rightarrow \neg Q(x) \vee R(x))$
c) $F = \exists x\, (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$

C

La fórmula $\neg \exists x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(x, y)$

a) no es cerrada y su conectivo principal es $\wedge$.
b) es cerrada y su conectivo principal es $\wedge$.
c) no es cerrada y su conectivo principal es $\neg$.

A

La fórmula F es tautología si y solo si:

a) su tableau tiene todas las ramas abiertas.
b) el tableau de $\neg$ F tiene todas las ramas cerradas.
c) los tableaux de F y $\neg$ F son abiertos.

B

La fórmula $\forall x \neg P(x) \vee \exists x\, P(x)$ es:

a) Tautología. b) Contradicción. c) Contingente.

A

La estructura deductiva $\neg (p \wedge q) \rightarrow r, \quad q \rightarrow \neg r \Rightarrow p \wedge \neg r$ verifica que:

a) es correcta.
b) es incorrecta y un contraejemplo es $V(p) = V(q) = V(r) = 0$.
c) es incorrecta y un contraejemplo es $V(p) = V(r) = 1, \quad V(q) = 0$.

C

Definiciones (10%)

1. Definir fórmula contingente.

   Es una fórmula que tiene modelos y no modelos.

2. Definir valoración de una fórmula F en Cálculo de Proposiciones.

   Una **valoración** es cualquier aplicación que asigna a cada variable proposicional un único valor de verdad, es decir, una aplicación $V : \Sigma \rightarrow \{0,1\}$.

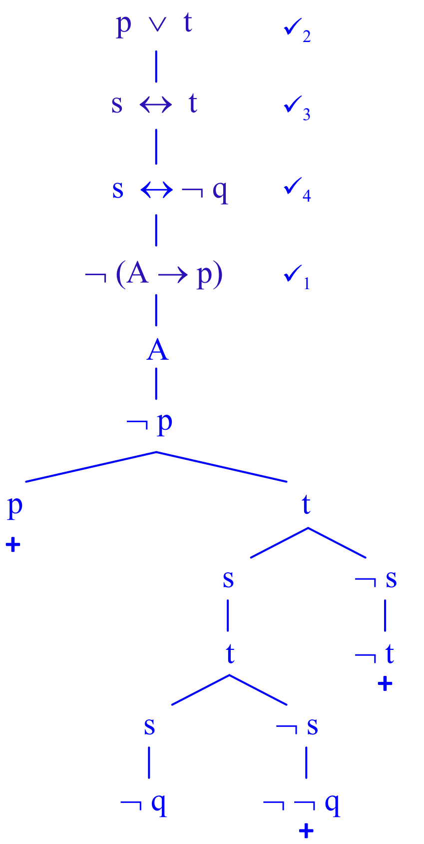
Ejercicios (30%)

1. Se considera la estructura deductiva

$$p \vee t,\ s \leftrightarrow t,\ s \leftrightarrow \neg q \ \Rightarrow\ A \rightarrow p$$

donde A es un literal. Determinar todos los valores de A que hagan que la estructura deductiva sea correcta.

Construimos el tableau del conjunto $\{ p \vee t,\ s \leftrightarrow t,\ s \leftrightarrow \neg q,\ \neg(A \rightarrow p)\}$ que debe ser cerrado para que la estructura deductiva sea correcta:



Como A es un literal, para que la rama que queda abierta se cierre los posibles valores de A son:

$$p,\ q,\ \neg s \text{ y } \neg t$$

2. Demostrar que las fórmulas siguientes son equivalentes, usando las equivalencias elementales dadas e indicando en cada paso las que se han utilizado: $(p \to q) \to q \equiv \neg q \to p$

$$(p \to q) \to q \underset{(1)}{\equiv} \neg (p \to q) \vee q \underset{(2)}{\equiv} (p \wedge \neg q) \vee q \underset{(3)}{\equiv}$$

$$\underset{(3)}{\equiv} (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \underset{(4)}{\equiv} (p \vee q) \wedge \top \underset{(5)}{\equiv} p \vee q \underset{(6)}{\equiv} q \vee p \underset{(7)}{\equiv} \neg\neg q \vee p \underset{(1)}{\equiv} \neg q \to p$$

(1) $A \to B \equiv \neg A \vee B$
(2) $\neg (A \to B) \equiv A \wedge \neg B$
(3) Distributiva: $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
(4) $\neg A \vee A \equiv \top$
(5) $A \wedge \top \equiv A$
(6) Conmutativa
(7) $\neg\neg A \equiv A$

3. Formalizar el siguiente razonamiento en Lógica de Predicados, utilizando D = {personas} como dominio:

Los políticos que quieren arreglar el mundo no son realistas. Existen políticos que no son realistas. Obama es un político que quiso arreglar el mundo pero no fue realista. Por tanto, si existen personas realistas, no todas son políticos.

Definimos los predicados y constantes que aparecen en el texto:

$P(x) = x$ es político, $R(x) = x$ es realista, $M(x) = x$ quiere arreglar el mundo, a = Obama.

La formalización de los enunciados dados es:

$\forall x\, (P(x) \wedge M(x) \to \neg R(x))$
$\exists x\, (P(x) \wedge \neg R(x))$
$P(a) \wedge M(a) \wedge \neg R(a)$

$\exists x\, R(x) \to \neg \forall x\, P(x)$

4. Probar utilizando reglas de inferencia que la estructura deductiva siguiente es correcta:

$\mathbf{A} = \forall x\, (P(x) \to Q(x))$, $\mathbf{B} = \exists x\, (\neg P(x) \to R(x))$, $\mathbf{C} = \forall x\, (S(x) \vee \neg R(x)) \Rightarrow \mathbf{H} = \exists x\, (Q(x) \vee S(x))$.

Por reducción al absurdo:

$\mathbf{A} = \forall x\, (P(x) \to Q(x))$
$\mathbf{B} = \exists x\, (\neg P(x) \to R(x))$
$\mathbf{C} = \forall x\, (S(x) \vee \neg R(x))$
$\neg \mathbf{H} = \neg \exists x\, (Q(x) \vee S(x)) \equiv \forall x \neg (Q(x) \vee S(x)) \equiv \forall x\, (\neg Q(x) \wedge \neg S(x))$

1.	$\neg P(a) \to R(a)$	por eliminación existencial con $x = a$ en B.
2.	$\neg Q(a) \wedge \neg S(a)$	por instanciación universal con $x = a$ en $\neg$ H.
3.	$\neg Q(a)$	por 2 y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
4.	$\neg S(a)$	por 2 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
5.	$P(a) \to Q(a)$	por instanciación universal con $x = a$ en A.
6.	$\neg P(a)$	por 3, 5 y la regla Modus Tollens.
7.	$R(a)$	por 1, 6 y la regla Modus Ponens.
8.	$S(a) \vee \neg R(a)$	por instanciación universal con $x = a$ en C.
9.	$S(a)$	por 7, 8 y la regla Silogismo Disyuntivo
10.	$S(a) \wedge \neg S(a)$	por 9, 4 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
11.	$\perp$	por 10 y la equivalencia $A \wedge \neg A \equiv \perp$

Como se llega a $\perp$, la estructura deductiva es correcta.

Problema 1 (20%):

a) (7 *puntos*) Demostrar, mediante reglas de inferencia, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$P_1 = \neg p \rightarrow q,\quad P_2 = s \wedge p \rightarrow r,\quad P_3 = s \vee r \rightarrow \neg w \wedge \neg r \quad \Rightarrow \quad Q = \neg s \vee q$$

Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Entonces, incorporamos la negación de la conclusión $Q = \neg s \vee q$ al conjunto de premisas y debemos llegar a contradicción:

$\neg Q = \neg (\neg s \vee q)$

1. $\neg \neg s \wedge \neg q$	de $\neg Q$ y Ley de De Morgan
2. $s \wedge \neg q$	de 1 y la equivalencia $\neg \neg A \equiv A$
3. s	de 2 y la regla $A \wedge B \Rightarrow A$
4. $\neg q$	de 2 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
5. $\neg \neg p$	de 4, P_1 y la regla Modus Tollens
6. p	de 5 y la equivalencia $\neg \neg A \equiv A$
7. $s \wedge p$	de 3, 6 y $A, B \Rightarrow A \wedge B$
8. r	de 7, P_2 y la regla Modus Ponens
9. $s \vee r$	de 8 y la regla $B \Rightarrow A \vee B$
10. $\neg w \wedge \neg r$	de 9, P_3 y la regla Modus Ponens
11. $\neg r$	de 10 y la regla $A \wedge B \Rightarrow B$
12. $r \wedge \neg r$	de 8, 11 y la regla $A, B \Rightarrow A \wedge B$
13. $\perp$	de 12 y la equivalencia $A \wedge \neg A \equiv \perp$

Como se llega a $\perp$, la estructura deductiva es correcta.

b) (3 *puntos*) Decidir si las siguientes estructuras deductivas son correctas utilizando únicamente los resultados obtenidos en el apartado a) (no utilizar tableaux ni reglas de inferencia de nuevo):

i. $P_1, P_3, \neg Q \Rightarrow \neg P_2$

ii. $P_1, P_2, P_3, A \Rightarrow Q$ siendo A una fórmula cualquiera.

Como la estructura deductiva $P_1, P_2, P_3 \Rightarrow Q$ es correcta, se sabe que el conjunto $\{ P_1, P_2, P_3, \neg Q \}$ es insatisfactible.

i. Para ver si la estructura deductiva $P_1, P_3, \neg Q \Rightarrow \neg P_2$ es correcta se estudia si el conjunto $\{ P_1, P_3, \neg Q, \neg \neg P_2 \}$ es insatisfactible. Como $\neg \neg P_2 \equiv P_2$, este conjunto tiene los mismos modelos que $\{ P_1, P_2, P_3, \neg Q \}$, por lo que también es insatisfactible y la estructura deductiva es correcta.

ii. Para ver si la estructura deductiva $P_1, P_2, P_3, A \Rightarrow Q$ es correcta se estudia si el conjunto $\{ P_1, P_2, P_3, A, \neg Q\}$ es insatisfactible. Como el conjunto $\{P_1, P_2, P_3, \neg Q\}$ no tiene modelos, al añadir cualquier fórmula A el nuevo conjunto tampoco tiene modelos y es insatisfactible. Así que para cualquier A la estructura deductiva también es correcta.

Problema 2 (20%):

a) (*7 puntos*) Probar, utilizando el método del tableau, que el conjunto $\{A, B, C\}$ es satisfactible, siendo: $\mathbf{A} = \forall x\, \forall y\, (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$, $\mathbf{B} = \exists x\, \forall y \neg Q(x, y)$, $\mathbf{C} = \neg \forall y\, \exists x\, P(x, y)$

Realizamos el tableau del conjunto:

$\mathbf{A} = \forall x\, \forall y\, (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

$\checkmark_1$ $\mathbf{B} = \exists x\, \forall y \neg Q(x, y)$

$\checkmark_2$ $\mathbf{C} = \neg \forall y\, \exists x\, P(x, y)$

$F_1 = \forall y \neg Q(a, y)$ — Eliminación existencial $x = a$ en B

$\checkmark_3$ $F_2 = \exists y \neg \exists x\, P(x, y)$

$\checkmark_4$ $\neg \exists x\, P(x, b)$ — Eliminación existencial $y = b$ en F_2

$F_3 = \forall x \neg P(x, b)$

$\neg P(a, b)$ — Instanciación universal $x = a$ en F_3

$\neg Q(a, b)$ — Instanciación universal $y = b$ en F_1

$F_4 = \forall y\, (P(a, y) \rightarrow Q(a, y))$ — Instanciación universal $x = a$ en A

$\checkmark_5$ $P(a, b) \rightarrow Q(a, b)$ — Instanciación universal $y = b$ en F_4

$\neg P(a, b)$ | $Q(a, b)$ +

En este punto ya se puede ver que la rama de la izquierda no se cierra aunque se instancien las fórmulas cuantificadas universalmente con todas las constantes utilizadas. Por tanto, el tableau es abierto y queda probado que el conjunto es satisfactible.

b) (*3 puntos*) Dar razonadamente una interpretación I, con dominio $D = \{d_1, d_2\}$ que sea modelo del conjunto anterior en la que la función booleana asociada a P no sea idénticamente nula.

La rama abierta proporciona los modelos del conjunto, que serán también modelos de todas las fórmulas de dicha rama.

Como el dominio es $D = \{d_1, d_2\}$ para definir la interpretación I fijamos $a := d_1$ y $b := d_2$ y funciones booleanas $P, Q : D \times D \rightarrow \{0, 1\}$ que hagan que todas las fórmulas de la rama tomen valor de verdad 1:

Para que $V_I(\neg P(a, b)) = V_I(\neg Q(a, b)) = 1$ elegimos $P(d_1, d_2) = Q(d_1, d_2) = 0$.

Para que $V_I(\forall y \neg Q(a, y)) = 1$ se necesita también que $Q(d_1, d_1) = 0$.

Para que $V_I(\forall x \neg P(x, b)) = 1$ se necesita también que $P(d_2, d_2) = 0$.

Falta completar la interpretación para que $V_I(\forall x \, \forall y \, (P(x, y) \to Q(x, y))) = 1$

Como $Q(d_1, d_1) = 0$ se necesita que $P(d_1, d_1) = 0$.

Como nos piden que la función booleana asociada a P no sea idénticamente nula, es necesario definir $P(d_2, d_1) = 1$ y en consecuencia $Q(d_2, d_1) = 1$.

Así, se tienen todos los valores fijados excepto $Q(d_2, d_2)$ que puede ser 1 o 0 ya que $P(d_2, d_2) = 0$.

Resumiendo, hay al menos dos interpretaciones con dominio $D = \{d_1, d_2\}$ que son modelos del conjunto {A, B, C}:

$a := d_1$ y $b := d_2$

y funciones booleanas $P, Q : D \times D \to \{0, 1\}$ definidas por:

$P(d_1, d_1) = 0$	$Q(d_1, d_1) = 0$
$P(d_1, d_2) = 0$	$Q(d_1, d_2) = 0$
$P(d_2, d_1) = 1$	$Q(d_2, d_1) = 1$
$P(d_2, d_2) = 0$	$Q(d_2, d_2) = 1$ o bien 0