TEMA 5

COMUNICACIONES DIGITALES

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Espacio de señales

- Convertir las complicadas relaciones y operaciones entre señales, en sencillas operaciones geométricas.
- Nos centraremos exclusivamente en el conjunto de señales reales de energía finita y duración T segundos.
- Este conjunto tiene estructura algebraica de e**spacio vectorial** sobre el cuerpo de los números reales.
- Por tanto, una señal se puede denotar indistintamente por s(t) o s ≡ $\vec{s}(t)$ para enfatizar su carácter de vector.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Base de un subespacio de señal

- Sea un conjunto de D señales, todas ellas de energía finita, y de duración T:

$$B = \left\{ \overrightarrow{\psi_1}, \overrightarrow{\psi_2}, \ldots, \overrightarrow{\psi_D} \right\}$$

- El conjunto de señales que puede obtenerse como combinación lineal de las anteriores, forma a su vez un espacio vectorial S que será un subconjunto del espacio total (un subespacio).
- Si dichas señales son linealmente independientes (es decir, no es posible expresar ninguna de ellas como combinación lineal de las demás), entonces se dice que B es una base de dicho subespacio y D la dimensión del mismo.
- Cualquier señal que esté contenida en dicho subespacio puede expresarse de manera única, como combinación lineal de los elementos de la base:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Base de un subespacio de señal

- Las cantidades c_i se denominan coordenadas del vector respecto a dicha base y se utilizan habitualmente para designar de manera unívoca al vector:

$$\vec{s} = (c_1, c_2, \ldots, c_D)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Constelación de una modulación digital

- Utilizando las coordenadas, cada señal queda representada por un vector del espacio R^D . Dicho vector admite una representación geométrica → cada señal del subespacio queda representada por un punto en el espacio de señal.

- En una transmisión digital se usa un conjunto C, formado por M señales diferentes, para designar los M símbolos del alfabeto. En consecuencia, un sistema determinado tendrá asociado un conjunto de M puntos en el espacio de señal. Ese conjunto de puntos se denomina la constelación de ese esquema de modulación.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Espacio euclídeo de señales

- Para que un espacio vectorial se convierta en euclídeo hay que definir una operación de producto escalar. Definido éste es inmediato determinar la *norma* (relacionada con el módulo) de los vectores, y a partir de ahí calcular distancias entre señales.

- Se define el producto escalar entre dos vectores (dos señales) como:

$$<\vec{r},\vec{s}>=\int_0^T r(t)\cdot s(t)\cdot dt$$

- En la definición se ha supuesto que las señales están definidas exclusivamente entre 0 y T segundos. Coincide con la definición de correlación entre dos señales de energía finita.

- La energía de una señal puede escribirse como:

$$E_s=<\vec{s},\vec{s}>$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Espacio euclídeo de señales

- Se define la *distancia* entre dos vectores como la norma del vector diferencia:

$$d_{rs} = \left\| \vec{r} - \vec{s} \right\|$$

- El decisor del receptor tiene una probabilidad de error que depende de la distancia euclídea entre señales en el espacio

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Vectores ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

- Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.
- Un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de vectores del conjunto es ortogonal y además todos los vectores tienen norma igual a uno. En espacio de señal se suele trabajar con bases ortonormales.
- En ocasiones se dispone del conjunto de señales $C = \{s_1(t), s_2(t),...,s_M(t)\}$ con las que trabaja un sistema de comunicaciones, pero no se conoce una base ortonormal para el espacio vectorial al que pertenecen.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Vectores ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

1. Se escoge un vector (señal) cualquiera del conjunto *C*. Se normaliza (dividiendo por su módulo) y será el primer vector u_1 de la base B.

2. Tomar otro vector del conjunto *C* : $s_i(t)$

3. Sustraer del vector $s_i(t)$ sus proyecciones sobre los vectores ya incluidos en la base B, obteniendo:

$$\vec{v}_i = \vec{s}_i - \sum_{e_j \in B} < \vec{s}_i, \vec{e}_j > \cdot \vec{e}_j$$

4. Si $v_i(t)$ es nulo pasar al punto siguiente. Si no lo es, normalizarlo e incluirlo en la base B.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

- A partir del producto escalar se puede definir el ángulo que forman entre sí dos vectores

$$<\vec{r},\vec{s}> \hat{=} \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos\varphi$$

- Al factor cos φ se le denomina habitualmente coeficiente de correlación entre las señales r(t) y s(t), denotándose también con la letra ρ .

$$\rho_{r,s} = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{E_r E_s}} \cdot \int_0^T r(t) \cdot s(t) \cdot dt$$

- Si alguna de las energías E_r ó E_s fuese cero, se toma por

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

- El coeficiente de correlación facilita mucho el cálculo de distancias entre señales.
- Que dos señales sean muy diferentes es equivalente a decir que la distancia entre ellas es grande.

$$d_{r,s}^2 = \left\| \vec{r} - \vec{s} \right\|^2 = \int_0^T \left[r(t)^2 + s(t)^2 - 2r(t) \cdot s(t) \right] \cdot dt = E_r + E_s - 2\rho_{r,s} \sqrt{E_r \cdot E_s}$$

- Para conocer la distancia entre dos señales, no es necesario conocer la forma de las mismas!
- Cuanto mayor sea el coeficiente de correlación entre dos señales, mayor será su distancia.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

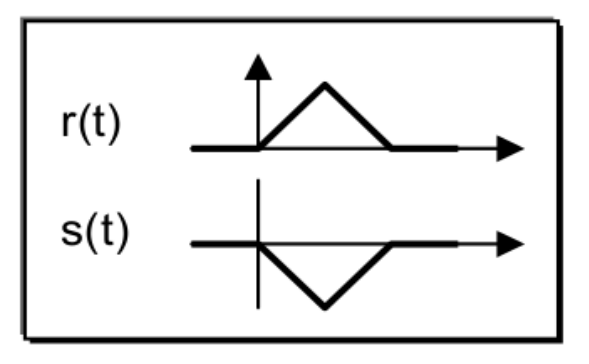
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

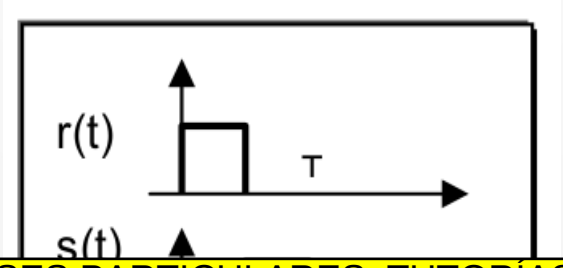
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

- ρ = -1. Se denominan señales antipodales.



- ρ = 0. Se denominan señales ortogonales.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Angulo entre dos vectores: coeficiente de correlación

Lo óptimo para realizar codificaciones de línea en comunicaciones digitales, es utilizar codificación antipodal. Sin embargo tiene el inconveniente de que limita el número de señales posibles a sólo dos (no es posible tener un conjunto de más de dos señales y que cualquiera dos de ellas sean antipodales). La codificación ortogonal es de peores prestaciones, pero es posible diseñar conjuntos de muchas señales todas ellas ortogonales entre sí.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tratamiento del ruido

- n(t) no pertenece en general al subespacio de trabajo, y por tanto, no se puede representar geométricamente.
- Suponemos señales pertenecientes al subespacio vectorial expandido por la base ortonormal B = {ψ_1, ψ_2,..., ψ_D}.
- El ruido recibido n(t) podrá escribirse como

$$n(t) = n_1 \cdot \overrightarrow{\psi_1} + n_2 \cdot \overrightarrow{\psi_2} + \ldots + n_D \cdot \overrightarrow{\psi_D} + n'(t) = \vec{n} + n'(t)$$

- Siendo las componentes n i las proyecciones de n(t) sobre cada uno de los vectores base

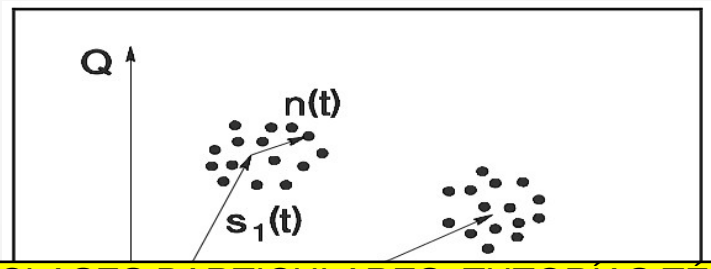
$$n_i = < n(t), \psi_i(t) >$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Tratamiento del ruido

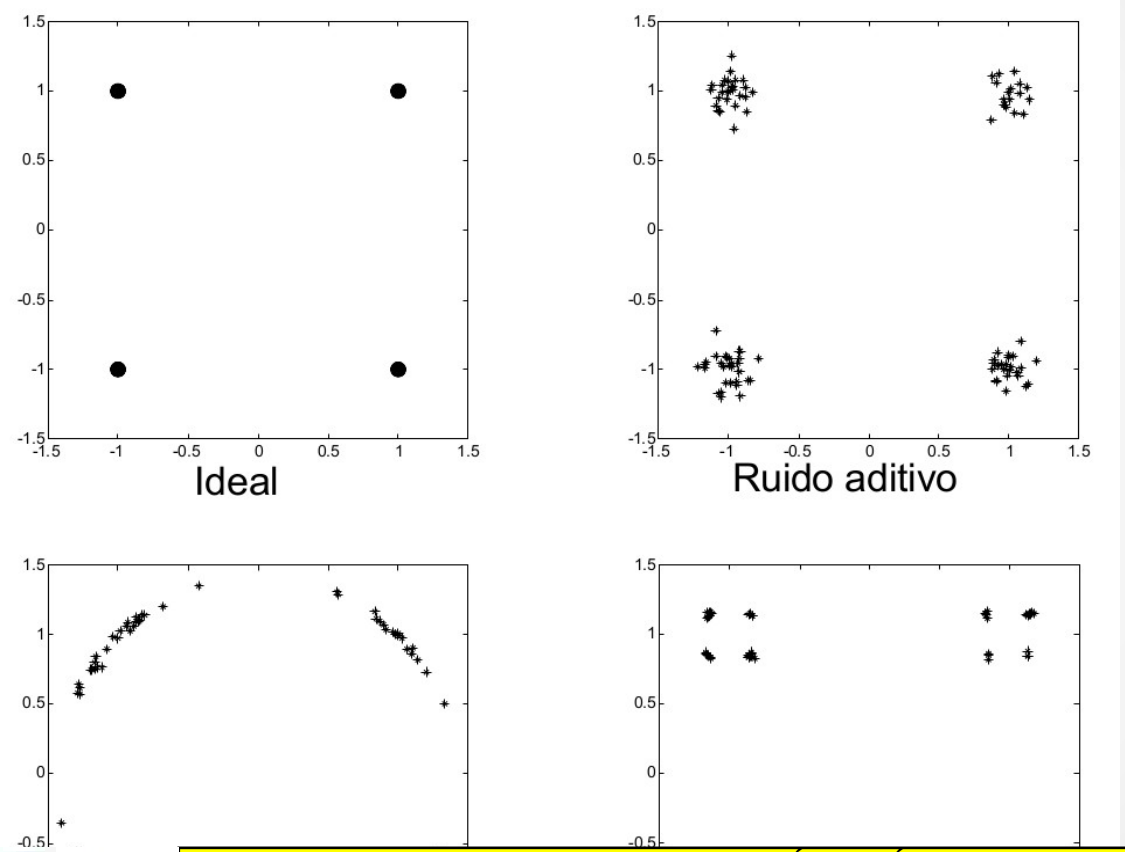
- Habitualmente se ignora y se representa el ruido exclusivamente como el vector (n_1 ,n_2,...,n_D), es decir, como la proyección de n(t) sobre el espacio de señal.
- En el caso de que n(t) sea gaussiano, las componentes n_i son variables aleatorias gaussianas, independientes entre sí.
- Cada vez que se envía una señal $\vec{s}_k$ de la constelación $(\vec{s}_k \in C)$, se recibirá la señal más un vector de ruido aleatorio: $\vec{z} = \vec{s}_k + \vec{n}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Calidad de una constelación



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

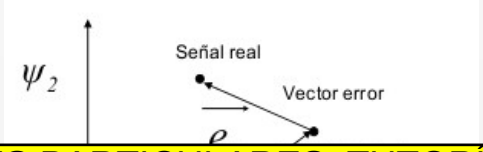
MER

- Modulation Error Ratio.

$$MER(dB) = 10 \cdot \log \frac{< \left\| \overrightarrow{x_n} \right\|^2 >}{< \left\| \overrightarrow{e_n} \right\|^2 >} \hat{=} 10 \cdot \log \frac{\sum_{n=1}^{N} \left\| \overrightarrow{x_n} \right\|^2}{\sum_{n=1}^{N} \left\| \overrightarrow{e_n} \right\|^2}$$

- Cociente entre la energía promedio de los símbolos idealmente recibidos y la energía promedio del error en los símbolos realmente recibidos.

- Si el único efecto de degradación que existe en la constelación es ruido aditivo, la MER coincide con la SNR.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

EVM

- Error Vector Magnitude

$$EVM(\%) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|\overrightarrow{e_n}\right\|^2}}{v_{MAX}}$$

- Se da relativo a la máxima amplitud (v_{MAX} es la mayor de las normas de los símbolos nominales)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.