fmT2 Sept'02 - 1/3

FUNDAMENTOS MATEMATICOS II
EXAMEN EXTRAORDINARIO (SEPTIEMBRE) DE 2002

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

	SI	NO	
1	X		Toda sucesión monótona que contiene una subsucesión convergente es convergente.
2	X		En un espacio normado se verifica $0 \in B_r(x) \iff \|x\| < r$.
3		X	Si R es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, entonces la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge $\forall x_0 \in [-R, R]$.
4	X		$\sum_{n=0}^{50} i^n = i$.
5		X	Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza mínimo y máximo en $[a, b]$, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
6		X	$\lim_{x \to 0^+} x^x = 0$.
7	X		El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})$ es cerrado en $\mathbb{R}$.
8	X		La función $f(x, y) = x^2 + y^4$ tiene mínimo absoluto en el origen.
9		X	Si $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
10		X	Si (X, d) es un espacio métrico, $A, B \subset X$ y $A \neq B$, entonces $\overline{A} \neq \overline{B}$.
11		X	La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
12	X		Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales primeras continuas en $x_0 \in \mathbb{R}^2$, entonces f es continua en x_0.
13		X	Toda serie alternada, tal que la sucesión de términos en valor absoluto es decreciente, es convergente.
14		X	Si $A \subset \mathbb{R}$ comprende sólo puntos aislados y es completo, entonces A es finito.
15		X	Sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in A$, entonces f es constante.
16	X		La serie $\sum^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 2

Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Sean

$$g_n(x) = \begin{cases} (1 + \frac{1}{n})f(x), & \text{si } x \in [0, n], \\ f(x), & \text{resto.} \end{cases}$$

1) (2 puntos) Estudiar la convergencia puntual de $g_n(x)$.

2) Estudiar la convergencia uniforme de $g_n(x)$ en su dominio $[0, \infty)$ y en subconjuntos del dominio de la forma $[a, b]$:

a) (2 puntos) Cuando f está acotada en su dominio $[0, \infty)$.

b) (2 puntos) Cuando f es continua y cumple que $f(n) = n$.

3) (4 puntos) Estudiar la convergencia uniforme de $g_n(x)$ en su dominio $[0, \infty)$ y en subconjuntos del dominio de la forma $[a, b]$ para el caso

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{resto.} \end{cases}$$

① ESTÁ CLARO QUE $g_n(x)$ CONVERGE PUNTUALMENTE A $f(x)$ EN $[0,\infty)$. EN EFECTO, SI $a \in [0,\infty)$, EXISTE $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE $a \in [0,N]$; ENTONCES, PARA TODO $n > N$ SE TIENE $g_n(a) = (1+\frac{1}{n}) f(a)$ Y, POR LO TANTO $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(a) = f(a)$

② SI $A \subset [0,\infty)$, LA CONVERGENCIA UNIFORME DE g_n A f EN A SIGNIFICA QUE $M_n = \sup\limits_{x\in A} |h_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, DONDE $h_n(x) = g_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} f(x), & x \in [0,n]; \\ 0, & \text{RESTO.} \end{cases}$

ⓐ COMO f ES ACOTADA EN $A = [0,\infty)$, EXISTE $K \in \mathbb{R}$ TAL QUE $\forall x \in A$ $|f(x)| < K$. ENTONCES $|h_n(x)| < \frac{1}{n} K$ Y $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, DE MODO QUE HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $A = [0,\infty)$.

ⓑ COMO f ES CONTINUA EN $[0,\infty)$, ESTÁ ACOTADA EN CUALQUIER $A = [a,b] \subset [0,\infty)$ Y, POR LO TANTO, HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN CUALQUIER $A = [a,b] \subset [0,\infty)$. SIN EMBARGO, NO LA HAY EN $[0,\infty)$, YA QUE $f(n) = n \Longrightarrow h_n(n) = \frac{1}{n} f(n) = 1$ Y $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$.

③ HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN CUALQUIER $A = [a,\infty)$ CON $a > 0$, PORQUE $f(x) = \frac{1}{x}$ ES ACOTADA EN A. PERO NO LA HAY EN $A = (0,\infty)$, YA QUE $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} h_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{nx} = +\infty$.

PROBLEMA 3

1. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1a) (1 punto) Estudiar su continuidad.

1b) (1 punto) Calcular $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$, $D_1 f(1,1)$, $D_2 f(1,0)$.

1c) (1 punto) Hallar el conjunto de puntos donde la función f es diferenciable.

MENTE EN $\mathbb{R}^2 - A$.

1b $D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h-0}{h} = 1$;

$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$;

$D_1 f(1,1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{[(1+h)^2-1]-0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2h+h^2}{h} = 2$;

$D_2 f(1,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1,h)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(1-h^2)-1}{h} = \lim_{h\to 0} (-h) = 0$.

1c SOLO PODRÍA HABER DIFERENCIABILIDAD EN EL ABIERTO $\mathbb{R}^2 - A$. EN ESTE ABIERTO LAS DERIVADAS PARCIALES $D_1 f(x,y) = 1 + \dfrac{y^2}{x}$ Y $D_2 f(x,y) = -\dfrac{2y}{x}$ EXISTEN Y SON CONTINUAS. LUEGO, f ES DIFERENCIABLE EN $\mathbb{R}^2 - A$.

1d OBVIAMENTE $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,y)\} \cup \{(x,x)\} \cup \{(x,-x)\}$ ES EL CONJUNTO FORMADO POR EL EJE DE LAS ORDENADAS Y LAS DOS BISECTRICES DE LOS CUADRANTES Y, POR ESO, <u>NO ES ABIERTO</u> (SU COMPLEMENTO NO ES CERRADO), <u>ES CERRADO</u> (SU COMPLEMENTO ES ABIERTO), <u>ES CONEXO</u> (POR SER CONEXO POR CAMINOS) Y <u>NO ES COMPACTO</u> (NO ES ACOTADO).

2 COMO f ES CONTINUA EN EL COMPACTO A, NECESARIAMENTE ALCANZA MÍNIMO Y MÁXIMO BIEN EN EL INTERIOR DE A, BIEN EN LA FRONTERA DE A.

1) COMO f ES DIFERENCIABLE EN EL INTERIOR DE A, DEBEN CONSIDERARSE SÓLO LOS PUNTOS EN LOS QUE $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0$ Y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 + 2y = 0$, O SEA, SÓLO EL PUNTO $\underline{a_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$.

2) LA FRONTERA DE A ES UNA CIRCUNFERENCIA, FORMADA POR LA SEMICIRCUNFERENCIA SUPERIOR $A_1 = \{(x, \sqrt{2-x^2}), -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$ Y LA INFERIOR $A_2 = \{(x, -\sqrt{2-x^2}), -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\}$.

EN A_1 LA FUNCIÓN f SE REDUCE A LA $\varphi(x) = f(x, \sqrt{2-x^2}) = 2 - x - \sqrt{2-x^2}$, DEFINIDA EN EL COMPACTO $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, CONTINUA EN EL MISMO Y DIFERENCIABLE EN SU INTERIOR, DE MODO QUE φ PUEDE TENER EXTREMOS SOLO EN LOS PUNTOS FRONTERA $-\sqrt{2}$ Y $\sqrt{2}$ DE ESTE COMPACTO Y EN AQUELLOS PUNTOS INTERIORES DEL MISMO EN LOS QUE $\dfrac{d\varphi}{dx} = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$, O SEA, EN LOS PUNTOS -1 Y 1. ESTO SIGNIFICA QUE LOS EXTREMOS DE f EN A_1 PUEDEN ESTAR SÓLO EN LOS PUNTOS $\underline{a_1 = (-\sqrt{2}, 0)}$, $\underline{a_2 = (\sqrt{2}, 0)}$, $\underline{a_3 = (-1, 1)}$ Y $\underline{a_4 = (1, 1)}$.

ANÁLOGAMENTE, PUEDE VERSE QUE EN A_2 DEBEN CONSIDERARSE SOLAMENTE LOS PUNTOS $a_1 = (-\sqrt{2}, 0)$, $a_2 = (\sqrt{2}, 0)$, $\underline{a_5 = (-1, -1)}$ Y $\underline{a_6 = (1, -1)}$.

PUESTO QUE $f(a_0) = -\frac{1}{2}$, $f(a_1) = 2 + \sqrt{2}$, $f(a_2) = 2 - \sqrt{2}$, $f(a_3) = 2$, $f(a_4) = 0$, $f(a_5) = 4$