

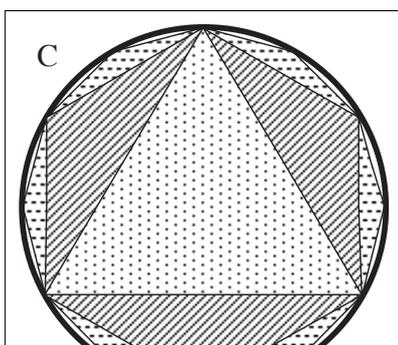
Tema 1

Cálculo integral de funciones reales de una variable

1.1 El problema del cálculo de áreas

Por razones prácticas, los problemas de encontrar el área encerrada por una curva o el volumen delimitado por una superficie han tenido gran importancia histórica. El cálculo de volúmenes aparece en el antiguo Egipto, hacia el año 1.800 a.C., en un papiro, *el papiro de Moscú*, en que se da una fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada. Más tarde, en la época griega, el matemático y astrónomo Eudoxo (alrededor del 370 a.C.), inventa un método, llamado el *método de exhaustión*, que consiste en aproximar áreas y volúmenes mediante formas cuyas áreas y volúmenes eran conocidas. Veamos en qué consiste ese método.

Ejemplo 1.1.1 (El método de exhaustión) Sea C un círculo de radio r , como se muestra en la figura. Intuitivamente, es claro que los sucesivos polígonos inscritos tienen áreas cada vez más próximas a la del círculo.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

e integral. En particular, es el *teorema fundamental del cálculo* el resultado que unirá de manera profunda derivación e integración y permitirá el cálculo sistemático de áreas y volúmenes.

A pesar de que los trabajos de Newton y Leibniz suponen un gran avance, hay aspectos del cálculo que todavía no son totalmente rigurosos. En la época de Newton no se había inventado el concepto de límite. Newton mismo hablaba de *infinitesimales*, y los usaba de manera poco rigurosa; véase la sección 1.9 para más información sobre este punto. Hay que esperar a la formalización del concepto de límite, ya entrado el siglo XIX, para que el concepto de integral se defina con total rigor. Cauchy formaliza el concepto de límite y sobre él Riemann establece una formalización definitiva. La formulación de Riemann permite calcular integrales de funciones bastante generales: funciones continuas, acotadas, continuas a trozos, y otras de más complejidad. A continuación, planteamos el problema general del área.

P1: Área bajo una función continua. Dada una función $f(x)$ continua y positiva en un intervalo $[a, b]$, encontrar el área encerrada entre $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

La figura 1.2 ilustra el planteamiento del problema: hallar el área de la zona rayada.

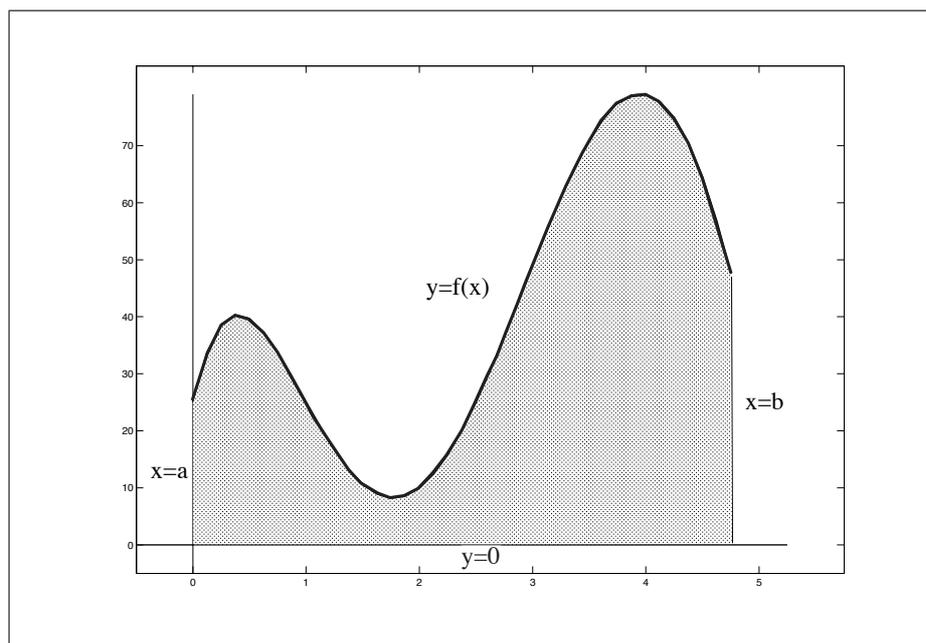


Figura 1.2: Área bajo una curva.

Como veremos más adelante, no es necesario que la función sea positiva ni continua, pero

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

desde Eudoxo, la formalización de Riemann se basa todavía en la aproximación del área delimitada por una curva por figuras más simples, en este caso tan simples como rectángulos. Obviamente, el éxito de su formalización está en explicar con rigor los pasos al límite y las condiciones de integrabilidad. En la siguiente sección se estudia las particiones de intervalos, que son necesarias más tarde para la construcción de los rectángulos.

1.2.1 Particiones de intervalos

Definición 1.2.1 Partición. Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se llama *partición* de $[a, b]$ a una colección finita de puntos del intervalo, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tales que $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Se llama *diámetro* de la partición al número $d = \min\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$.

Es obvio que las particiones de un intervalo no son únicas; de hecho, hay infinitas particiones de un mismo intervalo. Nos interesan un tipo especial de particiones, que definimos a continuación.

Definición 1.2.2 Partición regulares. Dado un intervalo $[a, b]$, la partición que consiste en dividir en n subintervalos iguales $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1 \dots n\}$ el intervalo entero se llama *partición regular*. La partición se designa por P_n y su diámetro es $d = 1/n$.

Ejercicio 1.2.3 Escribir la expresión exacta de los puntos x_i para una partición regular del intervalo $[a, b]$ con n puntos.

Definición 1.2.4 Ordenación de particiones. Dadas dos particiones P y Q se dice que P es un refinamiento de Q o que es más fina que Q si todo punto de Q es un punto de P . Se escribe $Q \subseteq P$.

Las particiones están definidas en base a la relación de inclusión de conjuntos. Esto sugiere que las relaciones se pueden ordenar entre sí, al menos parcialmente. Una *relación* sobre un conjunto se dice que es de *orden* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es de *orden total* si todo par de elementos del conjunto están relacionados. Es de *orden parcial* si no es de orden total.

Problema 1.2.5 Demostrar que la relación ser más fina que en el conjunto de las particiones es una relación de orden parcial. Prueba que no es de orden total.

Intuitivamente, puede parecer que siempre se puede encontrar una partición regular más fina que una dada. Esto no es cierto en general. El problema siguiente propone investigar esta cuestión.

Problema 1.2.6 Dado el intervalo $[0, 1]$, encontrar una partición arbitraria Q para la que no exista una partición regular P que sea más fina que Q .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99