Investigación Operativa

Tema 2:Optimización.

2.1 Introducción a los problemas de optimización. Resolución gráfica

Objetivos: Notaciones y conceptos preliminares de la Programación matemática. Teoremas de existencia de óptimos. Resolución gráfica.

1. Concepto de Óptimo

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y $X \subseteq D$

Definición: Se dice que $x^* \in X$ es un mínimo (máximo) local de *f* en X si existe un entorno de x^*, $E(X)$, tal que:

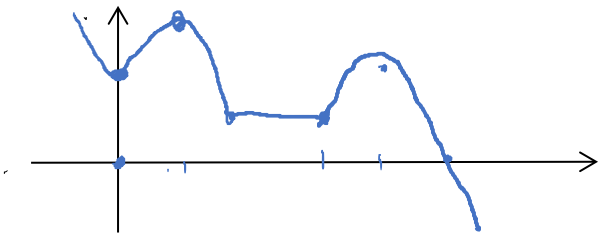
$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap E(X) \ \ (f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in X \cap E(X))$$

Definición: Se dice que $x^* \in X$ es un mínimo (máximo) global de *f* en X si:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X \ \ (f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in X)$$

Si las definiciones anteriores son estrictas se dirá que los óptimos son estrictos.

Ejemplo:



2. Formulación general del problema de programación matemática

$$\begin{gathered} \substack{max \\ min} f(\bar{x}) \\ s.a. \bar{x} \in F \end{gathered}$$

Notación:

- $\bar{x} \in F$: variables de decisión
- *f* función objetivo (valora las decisiones) $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $F = \{\bar{x} \in D: g(\bar{x}) \leq \bar{b}, h(\bar{x}) = \bar{c}\}$ Conjunto factible.
    - o $Si\ F = \emptyset$, el problema no es factible.
    - o $Si\ F = \{\bar{a}\}$, no existe problema de optimización, pues no hay posibilidad de elección.

Ejemplo:

3. Resolución gráfica para funciones reales de dos variables.

Se trata de resolver el programa $(P)\begin{cases} Opt\, f(x,y) \\ s.a.\,(x,y) \in F \end{cases}$

La gráfica de una función real de dos variables puede representarse en el plano mediante el mapa de sus *curvas de nivel*. Cada una de estas curvas reagrupa a todos los puntos del plano que poseen una misma imagen (mismo *nivel*, mismo valor a través de la función *f*),

Definición: Dada la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, llamaremos **curva de nivel** $\boldsymbol{k}$, con $k \in \mathbb{R}$, al conjunto

$$C_k = \{(x,y) \in D: f(x,y) = k\} \subset \mathbb{R}^2$$

Observación: para que el mapa de las curvas de nivel de una función sea más fácilmente interpretable los niveles $k \in \mathbb{R}$ se tomarán siempre equidistantes.

Observación: Atendiendo a la definición de función, compruébese que la intersección de dos curvas correspondientes a distinto nivel tienen intersección vacía (no se cortan en ningún punto).

Observación: *k* es en realidad el valor de la función (a mayor valor de la función mayor *k*, y al revés…)

Ejemplo: Dibujar las curvas de nivel de la función $z = x^2 + y^2$

Procedimiento para resolver gráficamente un programa (caso de 2 variables)

1. Dibujar el conjunto factible.
2. Dibujar dos curvas de nivel de la función objetivo (es decir, darle dos valores a la función objetivo y dibujar las gráficas) superponiéndolas al conjunto factible.
3. Desplazar las curvas de nivel por el conjunto factible: el primer punto que corten del conjunto será el mínimo y el último será el máximo

Observación: Aquellos puntos con menor curva de nivel (valor más bajo de *k* significa el valor más bajo posible de *f* y por tanto, el mínimo de la función) o mayor (valor más alto de *k* significa el valor más alto posible de *f* y por tanto, el máximo de la función.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \quad Opt\; x + y \\ s.a \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ \quad\quad x + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

EL CASO PARTICULAR DE LOS PROGRAMAS LINEALES

Proposición: El conjunto factible de un programa lineal es convexo.
Proposición: Si el programa lineal posee máximos (resp. mínimos), entonces alguno de ellos tiene que ser necesariamente un vértice o punto extremo del conjunto factible.

Observación: Si el conjunto factible es un polígono (está formado por funciones lineales) y la función objetivo es lineal, el óptimo de la función estará localizado en uno/s de los vértices de *F*

Llegados a este punto, podremos resolver el problema de dos modos:

a) Método gráfico: Como hasta ahora. Más seguro que el caso b) (ojo cuando la función objetivo es paralela a uno de los lados de *F*).
b) Método analítico. Calcular los vértices de *F y* sustituir en la función. El que tome el valor mayor será el máximo y el de valor menor, el mínimo. Estos valores pueden alcanzarse en más de un punto.

Problema-Ejemplo:

Un frutero acude a Mercamadrid a comprar naranjas con 5.000 €.

Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 10 € la caja y las de tipo B a 20 € la caja. Sabiendo que sólo dispone de su camioneta con espacio para transportar 350 cajas de naranjas como máximo y que piensa vender la caja de naranjas tipo A a 15 € y la caja de tipo B a 27 €,

¿Cuántas cajas de naranjas de cada tipo deberá comprar para maximizar sus ingresos por las ventas? ¿Cuál será ese ingreso máximo que le generará la venta)

4. Teoremas de existencia

Teorema de Weierstrass

Sea el programa $(P)\begin{cases} Opt\ f(\bar{x}) \\ s.a.\bar{x} \in F \end{cases}$ tal que *f* es una función continua y *F* es un conjunto compacto (cerrado y acotado). Entonces existen los óptimos globales del programa *P en F*.

Observación: Nosotros aplicaremos el Teorema de Weierstrass del siguiente modo: detectaremos los óptimos locales de diversos modos (gráfico, derivadas, etc) y veremos si se dan las condiciones del Teorema. En ese caso, el óptimo global estará entre los óptimos locales encontrados (ya que un óptimo global es óptimo local al mismo tiempo), de modo que bastará con observar las imágenes en *f* de estos óptimos para determinar cuál/es es/son globales.

Observación: Intuitivamente, una función de una variable es continua si su gráfica no presenta "saltos", "agujeros" o asíntotas. Esta idea se puede extender a funciones de dos variables. Los polinomios y exponenciales de polinomios son funciones continuas. Los logaritmos de polinomios, raíces de polinomios o cocientes de polinomios son funciones continuas en su dominio.

Teorema local-global Sea *A* un subconjunto convexo no vacío y $f: A \to \mathbb{R}$ una función convexa (cóncava) en *A*. Entonces si la función tiene un mínimo (máximo) local en $x_0 \in A$ entonces x_0 es un mínimo global. Además, será estricto (es decir, único) si la función es estrictamente convexa (estrictamente cóncava).

Corolario: Si x_0 es un mínimo (máximo) local de un programa convexo (cóncavo), x_0 es un mínimo (máximo) global.

Ejemplo: Demuéstrese que existe un único óptimo global del programa
$$\begin{cases} Max\ 8x - 6y - 2x^2 - 3y^2 + 4xy \\ \qquad s.a.\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$