INVESTIGACIÓN OPERATIVA.

Hoja1 (Introducción, planteamiento y resolución gráfica)

1. Manolo, un estudiante de la UAM que vive en Toledo, regresa después de las clases en el AVE que sale de Atocha a las 17:30 y que llega a las 18:00 a su estación, donde le recoge su madre con el coche familiar. El jueves, excepcionalmente, tomó el tren a las 17:00, con lo que llegó a Toledo a las 17:30 y emprendió a pie el camino a casa. Su madre, que no estaba advertida, salió de casa a la hora habitual y lo recogió por el camino, llegando ambos a casa diez minutos antes de lo usual. ¿Cuánto tiempo estuvo andando?

2. En septiembre Manolo tiene que decidir, durante el periodo de matriculación, las materias que estudiará durante el curso. El plan de estudios está estructurado por *créditos*, bloques de diez horas lectivas. Al matricularse el estudiante debe indicar cuántos créditos quiere cursar y a qué materias corresponden éstos. Pueden diferenciarse dos tipos de créditos, los que corresponden a materias teóricas y los que tienen contenido eminentemente práctico. El estudiante sabe que por cada crédito teórico del que se matricule deberá dedicar 15 horas al estudio (aparte de las 10 horas lectivas). Las horas de estudio que requiere cada crédito práctico son sólo 5. Él está dispuesto a estudiar al menos 400 horas durante el próximo curso, pero no más de 600. Por otra parte, las normas de matriculación le obligan a que el número de créditos de los cuales se matricula no sea superior a 60, ni inferior a 45. Además, al menos dos terceras partes de los créditos elegidos han de ser de carácter teórico. El estudiante quiere maximizar el número de créditos de los que se matricula. Plantea y resuelve su problema de optimización.

3. Una compañía que recicla papel usa papel y tela desechados para fabricar dos tipos distintos de papel reciclado. Cada tanda de papel reciclado de clase A requiere 20 kg de tela y 180 kg de papel y produce un beneficio de 500 euros, mientras que cada tanda de papel reciclado de clase B requiere 10 kg de tela y 150 kg de papel y produce un beneficio de 250 euros. La compañía dispone de 100 kg de tela y 660 kg de papel. ¿Cuántas tandas debe fabricar de cada tipo?

4. La empresa *Animales Salvajes S.A.* cría faisanes y perdices para repoblar el bosque y dispone de sitio para criar 100 pájaros durante la temporada. Criar un faisán cuesta 20 euros y criar una perdiz cuesta 30 euros. La fundación *Vida Animal* paga a *Animales Salvajes S.A.* por los pájaros de forma que se obtiene un beneficio de 14 euros por cada faisán y 16 euros por cada perdiz. La empresa dispone de 2400 euros para cubrir costes. ¿Cuántas perdices y cuántos faisanes debe criar?

5. La siguiente tabla da, para cinco alimentos básicos, A, B, C, D y E el porcentaje de proteínas, grasas e hidratos de carbono:

	Proteínas	Grasas	Hidratos de carbono
A	8.6	1.1	56.4
B	25.4	35.4	0
C	30.0	7.5	0
D	22.1	7.0	0
E	2.5	0	40.7

Los precios por unidad de estos alimentos, dados en el mismo orden de la tabla son 5, 17, 37, 10, 15. Si una persona necesita consumir como mínimo 75 gramos de proteínas, 90 de grasas y 300 de hidratos de carbono, plantear el problema de minimización para calcular la dieta alimenticia de mínimo coste.

6. La siguiente tabla indica los requerimientos mínimos de personal de enfermería en un hospital en distintos períodos del día.

Período del día	Número de enfermeras/os requerido
8:00-12:00	140
12:00-16:00	120
16:00-20:00	160
20:00-24:00	90
24:00-4:00	30
4:00-8:00	60

El trabajo está organizado en seis turnos de ocho horas cada uno. Cada cuatro horas comienza un nuevo turno. Por tanto, cada turno coincide durante las cuatro primeras horas con el turno anterior y durante las cuatro últimas con el turno siguiente. Plantear el problema de optimización para determinar cuántos enfermeros/as deben formar parte de cada turno, de forma que el número total sea mínimo y que se cumplan los requerimientos mínimos de personal.

7. Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27.5 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de pasteles (A y B). Cada caja de pasteles de tipo A requiere 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y su venta le reporta un beneficio de 20 unidades monetarias (UM). Cada caja de pasteles de tipo B requiere 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y su venta le reporta un beneficio de 30 UM.

   (a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe elaborar el pastelero de manera que se maximicen sus ganancias? Resolver el problema gráficamente.

(b) Supongamos que la cantidad de harina disponible aumenta en un kg. ¿Cuánto aumenta el beneficio del pastelero? Contestar a la misma cuestión para un aumento de un kg en la cantidad de azúcar y mantequilla.

8. Resuelve por separado cada uno de los cuatro problemas de programación lineal que pueden escribirse al sustituir los símbolos $\odot$ y $\oplus$ por todas las combinaciones posibles de signos $\geq$ y $\leq$ en la siguiente formulación

$$\begin{array}{rl} Max & 3x + 2y \\ s.a & 2x + 3y \odot 6 \\ & 2x + y \oplus 4 \\ & x \geq 0, \ y \geq 0 \end{array}$$

9. Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} Min & -3x_1 - 2x_2 \\ s.a & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Comprobar gráficamente que el problema tiene soluciones factibles pero no tiene solución óptima.

(b) Supongamos que se incorpora la restricción $x_1 + x_2 \geq 10$. Encontrar una solución óptima para el nuevo problema o probar que no existe.

10. Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} Max & x_1 + x_2 \\ s.a & -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 16x_1 - 14x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Encontrar gráficamente una solución óptima (x_1, x_2).

(b) Supongamos además que cada variable está restringida a tomar valores enteros. ¿Se obtiene un punto factible al redondear cada componente de la solución óptima al entero más próximo?

(c) Obtener gráficamente una solución óptima entera.

11. Escribir matricialmente un modelo de transbordo para un grafo con m nudos y n arcos, $u_1, ..., u_n$, sin bucles.

12. Escribir en forma estándar los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} Max \quad & 3x_1 + 2x_3 \\ s.a \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Min \quad & 2x_1 + x_2 \\ s.a \quad & x_1 - 2x_2 = 0 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max \quad & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s.a \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

13. Supongamos que tenemos n puntos en la recta: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. ¿Cómo elegimos x de tal manera que

$$S(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$$

sea mínimo? Éste es un ejemplo de un problema de optimización en el que el uso de derivadas no es recomendable. Puede ser de ayuda empezar considerando que $n = 2$, después que n es par y, finalemente, el caso en que n es impar.

14. Desde hace mucho tiempo, los matemáticos se han ocupado de los problemas de reparto justo. Si hay dos personas A, B que tienen que compartir un pastel, de tal forma que ambos queden convencidos de que su mitad es "justa" (por "justa" entendemos "mínimo la mitad según mi apreciación"), la solución "A corta, elige B" es bien conocida pero, ¿qué sucede si están involucradas tres personas?