Mecánica Clásica
Repaso de conocimientos de 1º
Cinemática de la Partícula

EIAE

4 de septiembre de 2011

Cinemática de la partícula 2
Definiciones 3
Partículas y sólidos 4
Sistema de referencia 5
Definiciones 6
Trayectoria 7
Trayectorias: definición geométrica 8
Trayectorias: ecuaciones paramétricas 9
Trayectorias: ecuaciones implícitas 10
Ecuaciones horarias, ley horaria 11
Ecuaciones horarias, ley horaria 12
Vector velocidad 13
Vector velocidad: coordenadas intrínsecas 14
Vector velocidad 15
Hodógrafa 16
Vector aceleración 17
Vector aceleración: coordenadas intrínsecas 18
Vector aceleración: coordenadas intrínsecas 19
Vector aceleración 20
Vector aceleración 21
Coordenadas cilíndricas 22
Derivación de los versores: geométrica 23
Derivación de los versores: analítica 24
Vector velocidad en cilíndricas 25
Vector aceleración en cilíndricas 26
Velocidad areolar: conceptos previos 27
Velocidad areolar 28
Movimientos centrales 29
Movimientos centrales 30
Consecuencias de la ley de áreas 31
1ª Fórmula de Binet 32
2ª Fórmula de Binet 33
Ejemplo: problema de Kepler 34
Ejemplo: problema de Kepler 35

Cinemática de la partícula

- Definiciones: Cinemática, punto, sólido
- Definiciones: Sistemas de referencia, posición, coordenadas
- Definiciones: Reposo, movimiento
- Definiciones: Trayectoria, ley horaria, ecuaciones horarias
- Vector velocidad
- Vector aceleración
- Coordenadas cilíndricas: velocidad y aceleración
- Velocidad areolar
- Movimientos centrales:
  - Definición y propiedades
  - Fórmulas de Binet, 1ª y 2ª

Definiciones

Cinemática: Es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, sin entrar a considerar su causa.

- Se puede ver como una extensión de la Geometría en la que, además de la posición, se considera el tiempo.
- No se estudia la masa, fuerza, o energía; de eso se ocupa la Dinámica, que relaciona el resultado (movimiento) con su causa (fuerzas).
- Las magnitudes fundamentales que intervienen en cada una de ellas son:

Geometría	L
Cinemática	L T
Dinámica	L T M

Partículas y sólidos

Cuerpo material: Cualquier objeto con masa. La Mecánica Clásica no estudia el movimiento de cuerpos de masa nula o despreciable (solo como ligaduras o para transmitir fuerzas).

Partícula o Punto: Cuerpo material que se representa como un punto geométrico del espacio, sin considerar para nada su extensión, orientación (actitud) o distribución de masa.

- Sin masa en Cinemática, con masa en Dinámica.
- No es necesario que sean pequeños: basta con que su orientación no influya en el movimiento. En Mecánica Celeste, por ejemplo, se tratan los planetas como puntos.

Sólido rígido: Conjunto de partículas cuyas distancias no varían.

- La Mecánica Clásica no estudia los sólidos deformables (Resistencia de Materiales y Elasticidad) ni los fluidos (Mecánica de Fluidos). Excepción: cables o hilos (enlaces) y muelles (fuerzas conocidas).

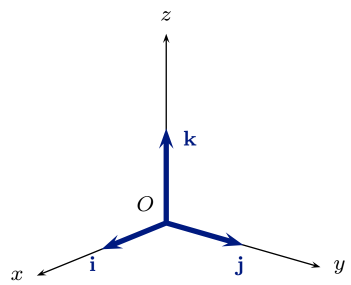
Sistema de referencia

- En Mecánica Clásica los cuerpos se mueven en el espacio euclídeo tridimensional, $\mathbb{R}^3$ (RE: $\mathbb{M}^{3+1}$, RG: Riemann, S/Cuerdas: 1+3+6+...).
- Para definir la posición de una partícula, se toma un

Sistema de referencia: Triedro o referencia triortogonal orientado a derechas, formado por

- El **origen de coordenadas**, un punto $O \in \mathbb{R}^3$
- Tres ejes Ox, Oy, Oz según los **versores** $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$

Unitarios	$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$	$\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1$	$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$
Ortogonales	$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$	$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$	$\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$
A derechas		$\mathbf{k}=\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$	



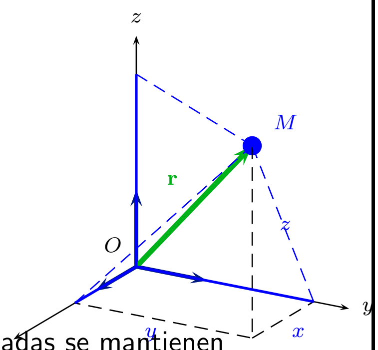
Definiciones

Vector posición de la partícula M respecto a la referencia $Oxyz$

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Coordenadas cartesianas de la partícula M respecto a la referencia $Oxyz$

$$x = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{r}^M \cdot \mathbf{k}$$



Reposo de la partícula M respecto a la referencia $Oxyz$: sus coordenadas se mantienen constantes $\forall\, t$

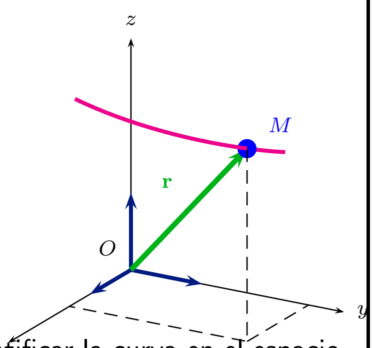
$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \qquad \text{Cte. } \forall\, t$$

Movimiento de la partícula M respecto a la referencia $Oxyz$: una o más coordenadas varían con el tiempo

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Trayectoria

- Curva C del espacio, lugar geométrico de las posiciones sucesivas de la partícula M en ejes $Oxyz$.
- El tiempo no es necesario: la trayectoria es un concepto geométrico.
- Se puede definir de varios modos:



definición geométrica: Dar los datos geométricos suficientes para identificar la curva en el espacio.

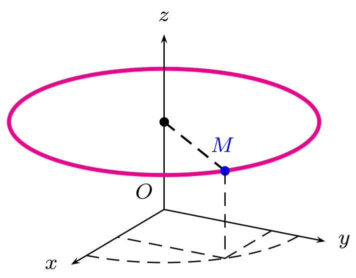
ecuaciones implícitas: Se dan dos ecuaciones correspondientes a superficies, cuya intersección define la curva C:

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

ecuaciones paramétricas: Se dan tres ecuaciones $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$ que determinan las coordenadas en función de un parámetro u.

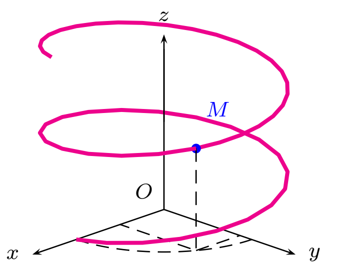
Trayectorias: definición geométrica

Avión en vuelo circular horizontal a una altura constante



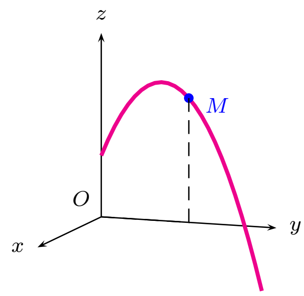
Circunferencia horizontal de centro $(0, 0, h)$ y radio R

Planeador en vuelo circular en una corriente ascendente (térmica)



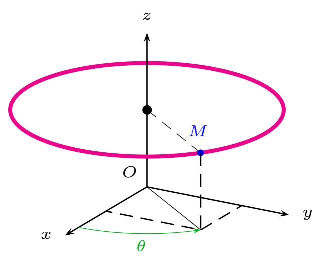
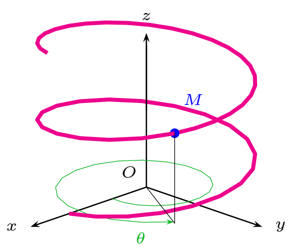
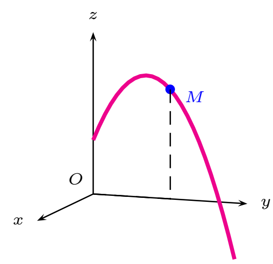
Hélice circular, eje Oz, pasa por $(R, 0, 0)$, pendiente α

Tiro parabólico en el vacío

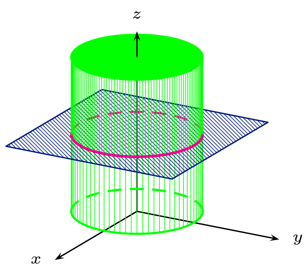
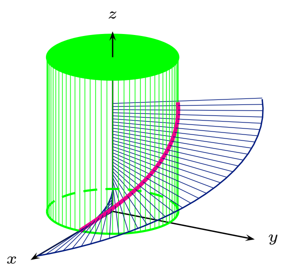
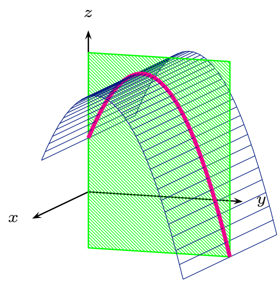


Parábola que pasa por tres puntos dados

Trayectorias: ecuaciones paramétricas

		
$x = R\cos\theta$ $y = R\sin\theta$ $z = h$	$x = R\cos\theta$ $y = R\sin\theta$ $z = R\theta\tan\alpha$	$x = 0$ $y = v_0\cos\alpha\, u$ $z = v_0\sin\alpha\, u - \frac{gu^2}{2}$

Trayectorias: ecuaciones implícitas

		
$x^2 + y^2 = R^2$ $z = h$	$x^2 + y^2 = R^2$ $\tan \frac{z}{R \tan \alpha} = \frac{y}{x}$	$x = 0$ $z = \frac{y}{\cot \alpha} - \frac{g\, y^2}{2 v_0^2 \cos \alpha^2}$

Ecuaciones horarias, ley horaria

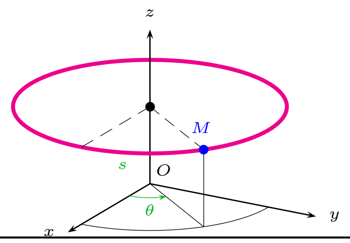
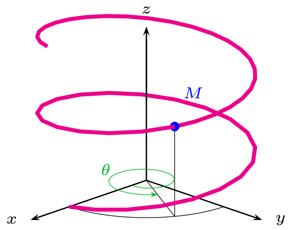
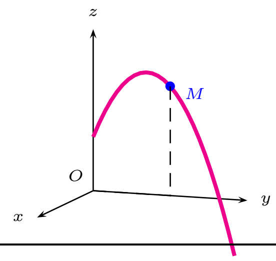
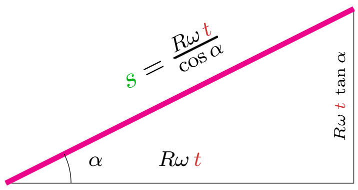
Ecuaciones horarias: Ecuaciones paramétricas de la trayectoria, tomando como parámetro el tiempo: $\boxed{x(t),\ y(t),\ z(t)}$

Ley horaria: (sentido amplio) parámetro u de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, como función del tiempo : $\boxed{u(t)}$

Ley horaria: (sentido estricto) parámetro natural s de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (longitud de arco recorrido), como función del tiempo: $\boxed{s(t)}$

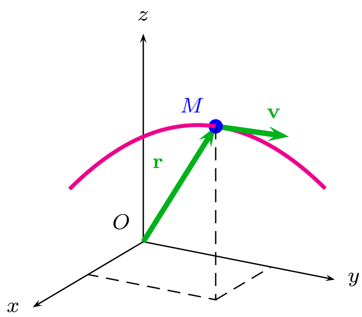
Trayectoria		Ley horaria		Ecuaciones horarias
$x(u),\ y(u),\ z(u)$	$+$	$u(t)$	$\Rightarrow$	$x(t),\ y(t),\ z(t)$
$x(s),\ y(s),\ z(s)$		$s(t)$		$x(t),\ y(t),\ z(t)$

Ecuaciones horarias, ley horaria

		
$x = R\cos\omega\, t$ $y = R\sin\omega\, t$ $z = h$	$x = R\cos\omega\, t$ $y = R\sin\omega\, t$ $z = R\omega\, t\tan\alpha$	$x = 0$ $y = v_0\cos\alpha\, t$ $z = v_0\sin\alpha\, t - \frac{g\,t^2}{2}$
$\theta = \omega\, t$ $s = R\omega\, t$	$\theta = \omega\, t$ 	$u = t$ $s = \ldots$

Vector velocidad

Vector velocidad de un punto M relativa a un sistema de referencia es la derivada respecto al tiempo de su vector posición en esos ejes, considerados como fijos.



$$\mathbf{v}^M = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}^M(t+\Delta t) - \mathbf{r}^M(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}^M}{dt} = \dot{\mathbf{r}}^M$$

- Siempre se define respecto a unos ejes determinados, pero puede proyectarse en otros distintos
- Conocidas las ecuaciones horarias en ejes fijos, su cálculo es trivial:

$$\mathbf{r}^M = \mathbf{OM} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

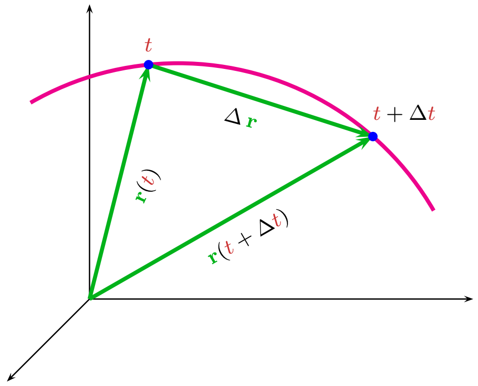
$$\mathbf{v}^M = \dot{\mathbf{r}}^M = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} + x\,\cancel{\dot{\mathbf{i}}} + y\,\cancel{\dot{\mathbf{j}}} + z\,\cancel{\dot{\mathbf{k}}} =$$

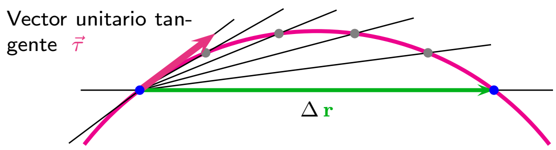
$$= \boxed{\mathbf{v}^M = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}}$$

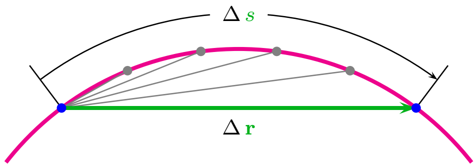
Vector velocidad: coordenadas intrínsecas

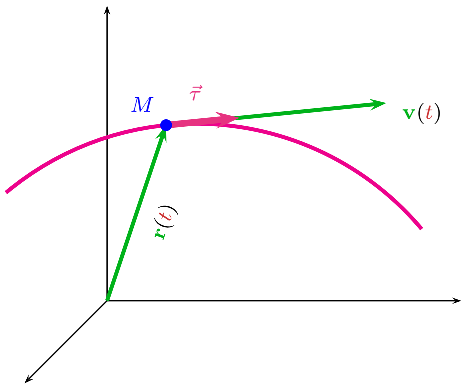
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t}=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\,\mathbf{r}}{ds}=\dot{s}\,\vec{\tau}= \qquad \boxed{\mathbf{v}=v\,\vec{\tau}}$$

$$\dot{s}=v=|\mathbf{v}|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \qquad |\vec{\tau}|=1$$

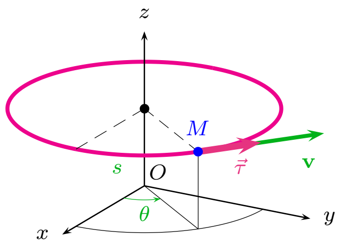








Vector velocidad

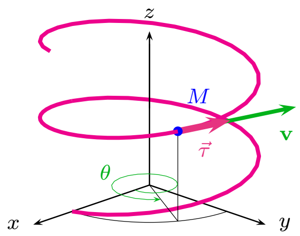


$$\mathbf{r}=\begin{Bmatrix}R\cos\omega\,t\\ R\sin\omega\,t\\ h\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}=R\omega\begin{Bmatrix}-\sin\omega\,t\\ \cos\omega\,t\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\dot{s}=v=R\omega$$

$$\vec{\tau}=\begin{Bmatrix}-\sin\omega\,t\\ \cos\omega\,t\\ 0\end{Bmatrix}$$

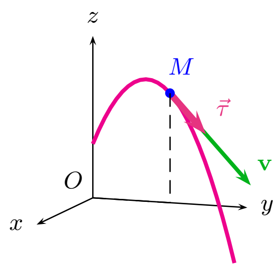


$$\mathbf{r}=\begin{Bmatrix}R\cos\omega\,t\\ R\sin\omega\,t\\ R\omega\,t\tan\alpha\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}=R\omega\begin{Bmatrix}-\sin\omega\,t\\ \cos\omega\,t\\ \tan\alpha\end{Bmatrix}$$

$$\dot{s}=v=\frac{R\omega}{\cos\alpha}$$

$$\vec{\tau}=\cos\alpha\begin{Bmatrix}-\sin\omega\,t\\ \cos\omega\,t\\ \tan\alpha\end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{r}=\begin{Bmatrix}0\\ v_0\cos\alpha\,t\\ z_0+v_0\sin\alpha\,t-\frac{g\,t^2}{2}\end{Bmatrix}$$

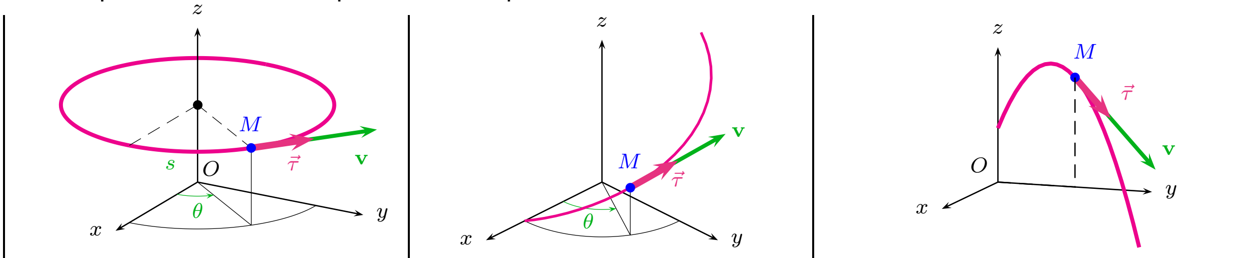
$$\mathbf{v}=\begin{Bmatrix}0\\ v_0\cos\alpha\\ v_0\sin\alpha-g\,t\end{Bmatrix}$$

$$\dot{s}=\sqrt{v_0^2-2v_0\sin\alpha g\,t+g^2\,t^2}$$

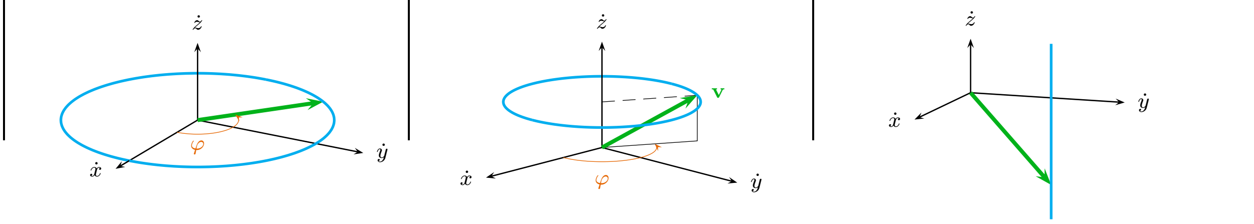
Hodógrafa

Hodógrafa Es la curva descrita por el extremo de un vector equipolente al vector velocidad, llevado al origen (indicatriz).

Si se considera el vector velocidad como vector posición de un punto, la Hodógrafa sería la trayectoria de este punto ficticio. No aparece el tiempo.

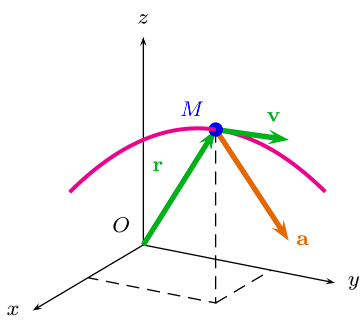


$$\mathbf{v} = R\omega \begin{Bmatrix} -\sin\omega\, t \\ \cos\omega\, t \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v} = R\omega \begin{Bmatrix} -\sin\omega\, t \\ \cos\omega\, t \\ \tan\alpha \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - g\, t \end{Bmatrix}$$



Vector aceleración

Vector aceleración de un punto M relativa a un sistema de referencia es la derivada respecto al tiempo de su vector velocidad en esos ejes, considerados como fijos.



$$\mathbf{a}^M = \frac{d\mathbf{v}^M}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}^M}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}}^M = \ddot{\mathbf{r}}^M$$

- Siempre se define respecto a los mismos ejes que la velocidad, pero puede proyectarse en otros.
- Conocidas las ecuaciones horarias en ejes fijos, su cálculo es trivial

$$\mathbf{v}^M = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}^M = \dot{\mathbf{v}}^M = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} + \dot{x}\,\cancel{\dot{\mathbf{i}}} + \dot{y}\,\cancel{\dot{\mathbf{j}}} + \dot{z}\,\cancel{\dot{\mathbf{k}}} =$$

$$= \boxed{\mathbf{a}^M = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}}$$

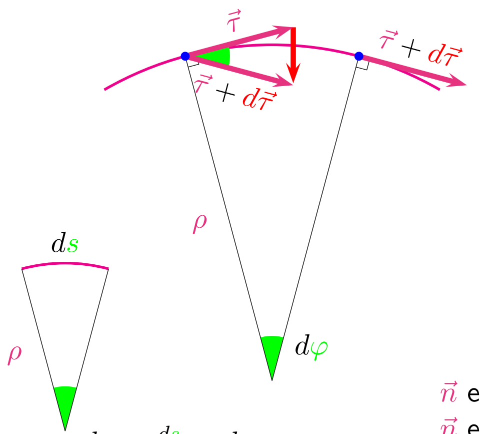
Vector aceleración: coordenadas intrínsecas

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\,\vec{\tau}) = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \dot{s}\,\dot{\vec{\tau}} = \boxed{\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{n}}$$

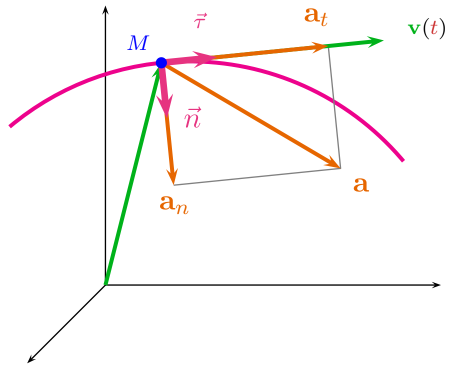
$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\,s}{d\,t} \cdot \frac{d\,\vec{\tau}}{d\,s} = \dot{s}\,\vec{\tau}' = \frac{\dot{s}}{\rho}\,\vec{n} = \frac{v}{\rho}\,\vec{n} = v\,\vec{\kappa}$$

$$\begin{cases} \text{Tangencial:} & \mathbf{a}_t = \ddot{s}\,\vec{\tau} = \dot{v}\,\vec{\tau} \\ \text{Normal:} & \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{n} = v^2\,\kappa\,\vec{n} \end{cases}$$

$$|d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}| \cdot d\varphi = 1 \cdot \frac{ds}{\rho}$$



$$d\varphi = \frac{ds}{\rho} = ds\,\kappa$$



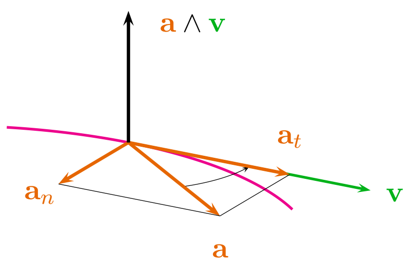
$\vec{n}$ en Mecánica: hacia el centro de curvatura

$\vec{n}$ en Geometría Diferencial: $(\vec{\tau}, \vec{n})$ a derechas.

Vector aceleración: coordenadas intrínsecas

- Conocidas $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$, las componentes intrínsecas se obtienen usando el desarrollo del producto triple

$$\overbrace{\mathbf{v} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v})}^{\perp \mathbf{v}} = v^2\,\mathbf{a} - \overbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\ \mathbf{v}}^{\parallel \mathbf{v}}$$



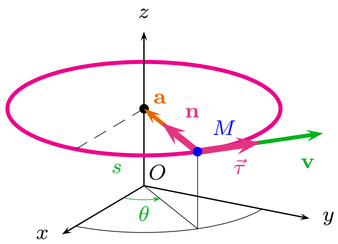
$$\mathbf{a}_t = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\ \mathbf{v}}{v^2} \qquad |\mathbf{a}_t| = \dot{v} = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}|}{v}$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{v} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v})}{v^2} \qquad |\mathbf{a}_n| = \frac{v^2}{\rho} = \frac{|\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}|}{v}$$

- Intrínsecas: se ve el sentido físico de cada término:

$$\mathbf{v} = v\,\vec{\tau} \qquad \begin{array}{lll} \mathbf{a}_t = \dot{v}\,\vec{\tau} & \text{Varía el módulo de } \mathbf{v} & (\gtreqqless 0) \\ \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\,\vec{n} & \text{Varía la dirección de } \mathbf{v} & (\geqq 0) \end{array}$$

Vector aceleración



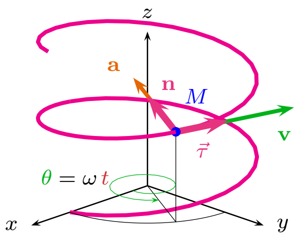
$$\mathbf{v} = R\omega \begin{Bmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = R\omega^2 \begin{Bmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$v = R\omega \qquad \dot{v} = 0$

$\mathbf{a} = 0 \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\,\mathbf{n}$

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_n \qquad \rho = R$



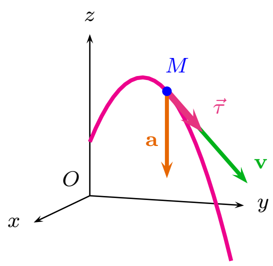
$$\mathbf{v} = R\omega \begin{Bmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ \tan\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = R\omega^2 \begin{Bmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$v = \frac{R\omega}{\cos\alpha} \qquad \dot{v} = 0$

$\mathbf{a} = 0 \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\,\mathbf{n}$

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_n \qquad \rho = \frac{R}{\cos^2\alpha}$



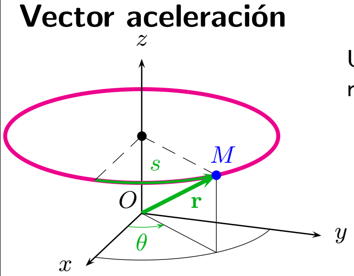
$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \cos\alpha\, t \\ z_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{g\,t^2}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - g\,t \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$

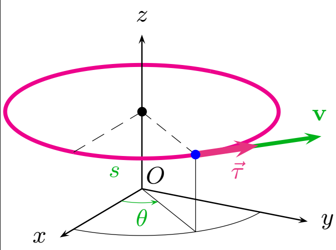
$$\dot{s} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\alpha g\, t + g^2\, t^2}$$

Vector aceleración

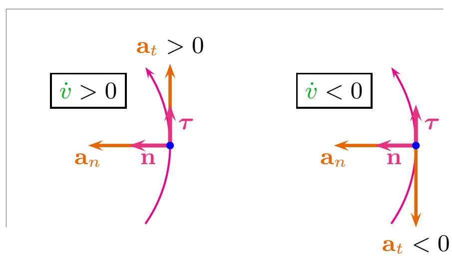


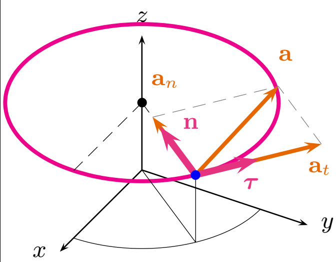
Un punto se mueve con velocidad de módulo variable $v(t)$; su trayectoria es una circunferencia horizontal de radio R y centro a una altura h.

$$\dot{s} = v \quad \rightarrow \quad s = \int_0^t v(t)\,dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{r} = R \begin{Bmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \\ h \end{Bmatrix} \qquad \theta = \frac{s}{R}$$



$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{s} \begin{Bmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \\ 0 \end{Bmatrix} = v\,\vec{\tau}$$





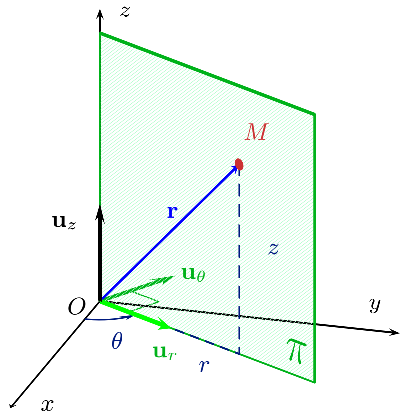
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s} \begin{Bmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\dot{s}^2}{R} \begin{Bmatrix} -\cos s/R \\ -\sin s/R \\ 0 \end{Bmatrix} = \dot{v}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n}$$

Coordenadas cilíndricas

- Plano π que contiene a M y a Oz
- Coordenadas cartesianas r, z en π
- Coordenada θ: $\angle(\pi, Oxz)$
- Versores en las direcciones en que crecen las coordenadas:

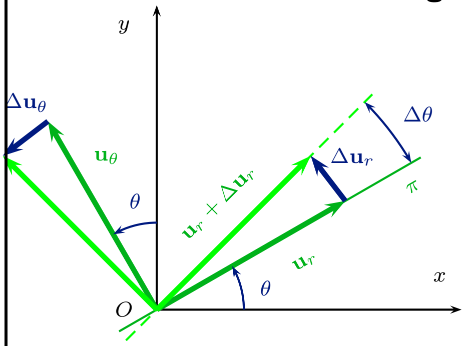
$$\overbrace{\mathbf{u}_r,\ \mathbf{u}_\theta,}^{\text{móviles}}\ \overbrace{\mathbf{u}_z}^{\text{cte.}}$$

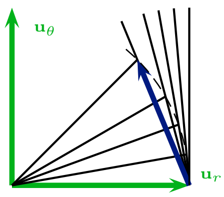
- Polares: cilíndricas sin z, planas

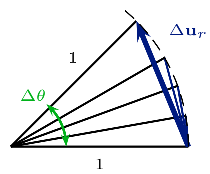


$$\mathbf{r}^M = r\,\mathbf{u}_r + z\,\mathbf{u}_z = r\,\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}^M = \dot r\,\mathbf{u}_r + r\,\dot{\mathbf{u}}_r + \dot z\,\mathbf{k} = \dot r\,\mathbf{u}_r + r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \dot z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}^M = \left(\ddot r - r\,\dot\theta^2\right)\,\mathbf{u}_r + \left(r\,\ddot\theta + 2\dot r\,\dot\theta\right)\,\mathbf{u}_\theta + \ddot z\,\mathbf{k}$$

Derivación de los versores: geométrica

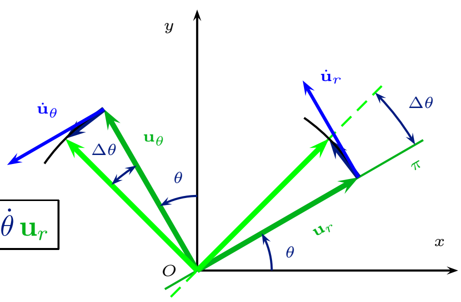




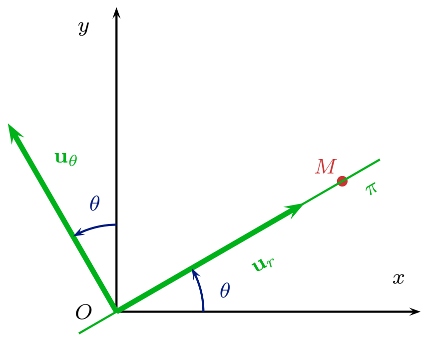


$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} =$$
$$= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{u}_r|}{\Delta t}\right)\,\mathbf{u}_\theta = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\,\mathbf{u}_\theta = \boxed{\dot{\mathbf{u}}_r = \dot\theta\,\mathbf{u}_\theta}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{u}_\theta|}{\Delta t}\right)(-\mathbf{u}_r) =$$
$$= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)(-\mathbf{u}_r) = \boxed{\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot\theta\,\mathbf{u}_r}$$



Derivación de los versores: analítica



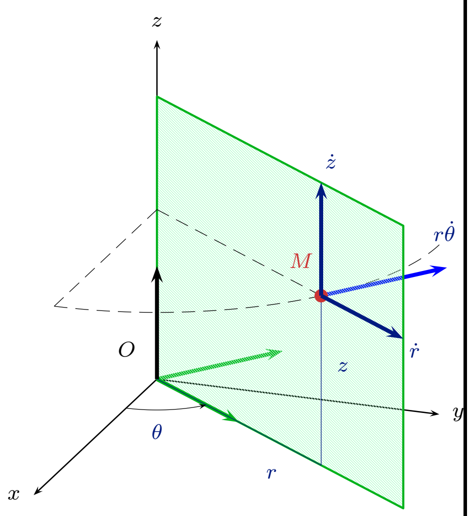
Proyectar en ejes fijos, y derivar:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_r &= \dot\theta\,(\overbrace{-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}}^{\mathbf{u}_\theta}) \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= \dot\theta\,(\underbrace{-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}}_{-\mathbf{u}_r}) \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_r &= \dot\theta\,\mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot\theta\,\mathbf{u}_r \end{aligned}}$$

que coincide con las expresiones obtenidas anteriormente.

Vector velocidad en cilíndricas



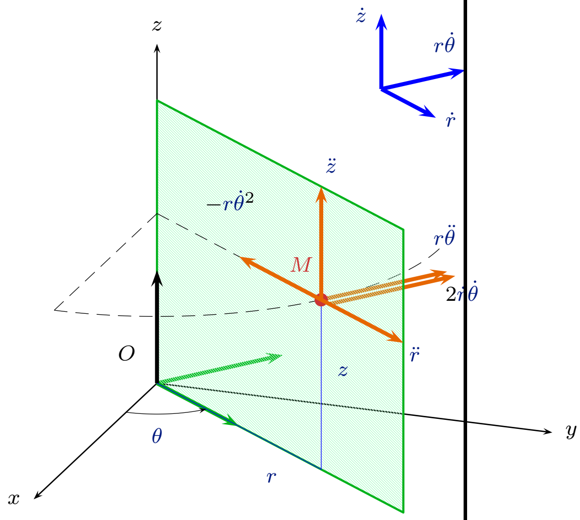
Se deriva el vector posición teniendo en cuenta las derivadas de los versores móviles, $\dot{\mathbf{u}}_r = \dot\theta\,\mathbf{u}_\theta$:

$$\mathbf{r}^M = r\,\mathbf{u}_r + z\,\mathbf{u}_z$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^M &= \dot r\,\mathbf{u}_r + r\,\dot{\mathbf{u}}_r + \dot z\,\mathbf{u}_z = \\ &= \dot r\,\mathbf{u}_r + r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \dot z\,\mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{v}^M = \dot r\,\mathbf{u}_r + r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \dot z\,\mathbf{u}_z}$$

Vector aceleración en cilíndricas



Se deriva el vector velocidad, teniendo en cuenta las derivadas de los versores móviles, $\dot{\mathbf{u}}_r = \dot\theta\,\mathbf{u}_\theta$, $\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot\theta\,\mathbf{u}_r$:

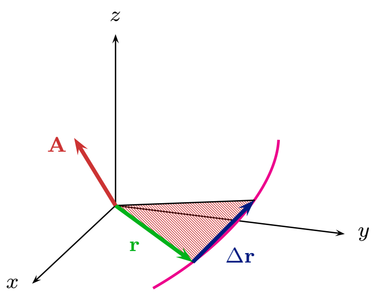
$$\mathbf{v}^M = \dot r\,\mathbf{u}_r + r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \dot z\,\mathbf{u}_z$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^M &= \ddot r\,\mathbf{u}_r + \dot r\,\dot{\mathbf{u}}_r + \dot r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \\ &\quad + r\,\ddot\theta\,\mathbf{u}_\theta + r\,\dot\theta\,\dot{\mathbf{u}}_\theta + \ddot z\,\mathbf{u}_z =\end{aligned}$$

$$= \ddot r\,\mathbf{u}_r + \dot r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \dot r\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + r\,\ddot\theta\,\mathbf{u}_\theta - r\,\dot\theta\,\dot\theta\,\mathbf{u}_\theta + \ddot z\,\mathbf{u}_z =$$

$$\boxed{\mathbf{a}^M = \left(\ddot r - r\,\dot\theta^2\right)\mathbf{u}_r + \left(r\,\ddot\theta + 2\,\dot r\,\dot\theta\right)\mathbf{u}_\theta + \ddot z\,\mathbf{u}_z}$$

Velocidad areolar: conceptos previos

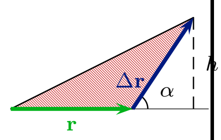


Área de un triángulo en el espacio, con un vértice en el origen:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}\wedge\Delta\mathbf{r}$$

Vector normal al triángulo, de módulo

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}\,|\mathbf{r}|\cdot|\Delta\mathbf{r}|\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\,b\,h$$

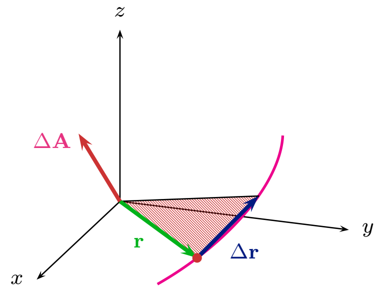


Se usarán para definir la velocidad areolar: concepto abstracto, pero muy útil en movimientos centrales

Velocidad areolar

Área barrida por un punto en un tiempo Δt

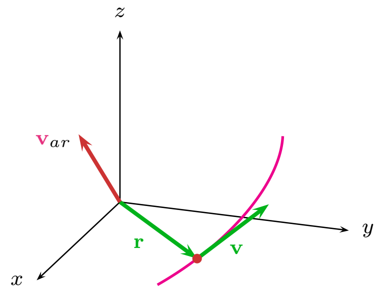
$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \wedge \Delta\mathbf{r}$$



Velocidad areolar: área barrida por un móvil en la unidad de tiempo:

$$\mathbf{v}_{ar} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \wedge \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} =$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{ar} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}}$$



Aceleración areolar:

$$\mathbf{a}_{ar} = \frac{d\mathbf{v}_{ar}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}_{ar} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}}$$

Movimientos centrales

El vector aceleración pasa siempre por un punto fijo, el Centro.

- La velocidad areolar respecto al Centro es un vector constante ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{a}$)

$$\dot{\mathbf{v}}_{ar} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{ar} = \vec{\text{Cte}}.$$

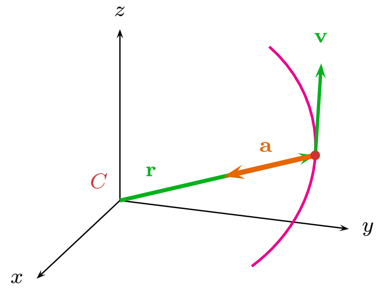
- Son movimientos planos

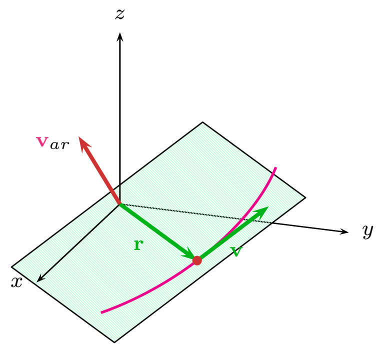
$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = 2\,\mathbf{v}_{ar} = \vec{\text{Cte}}. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \perp \vec{\text{Cte}}.$$

$$\mathbf{r} \cdot \vec{\text{Cte}}. = 0 \;\Rightarrow\; A\,x + B\,y + C\,z = 0$$

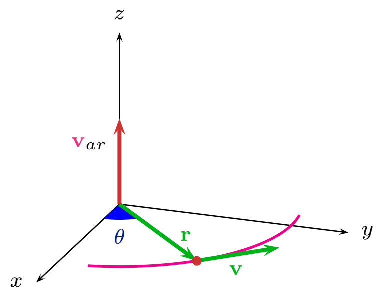
- Coordenadas polares en el plano del movimiento, origen (polo) en el Centro

$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{u}_r + \cancel{a_\theta\,\mathbf{u}_\theta}$$





Movimientos centrales



- Velocidad areolar en cartesianas:

$$\mathbf{v}_{ar} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{Bmatrix}$$

- Velocidad areolar en polares: Ley de áreas

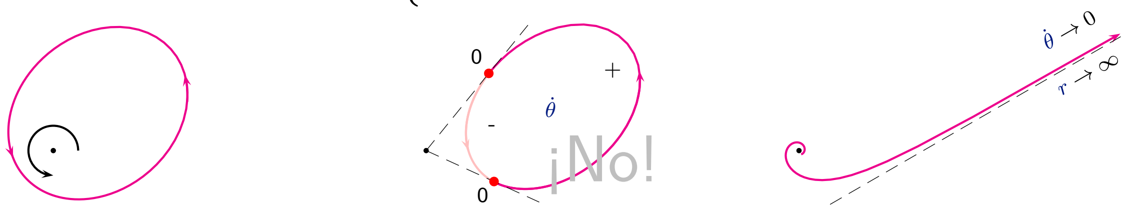
$$\mathbf{v}_{ar} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_z \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r^2\dot{\theta} = C} \quad \text{(Cte. de áreas)}$$

Por otro camino:

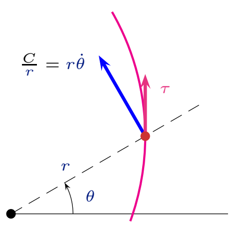
$$\mathbf{a}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \xrightarrow{r\cdot} r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt} r^2\dot{\theta} = 0 \rightarrow r^2\dot{\theta} = C$$

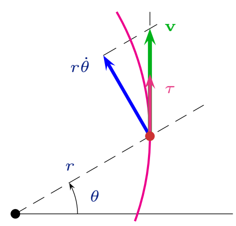
Consecuencias de la ley de áreas

- $\dot{\theta}$ no cambia de signo: $r^2\dot{\theta} = C$ $\quad \begin{cases} r^2 > 0 & \Rightarrow \quad \dot{\theta} \neq 0 \\ \dot{\theta} = 0 & \Rightarrow \quad r \rightarrow \infty \end{cases}$



- Trayectoria $r(\theta)$ y C determinan $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ $\rightarrow$ Fórmulas de Binet





$$\begin{array}{lll} r^2\dot{\theta} = C & \rightarrow & r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = v_\theta(\theta) \\ r(\theta) & \rightarrow & \tau(\theta) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} r\dot{\theta} \\ \tau(\theta) \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{v}(\theta) \xrightarrow{\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}} \mathbf{a}(\theta)$$

1ª Fórmula de Binet

- Conocidas $r(\theta)$ y C, hallar $\mathbf{v}(\theta)$, o $v(\theta)$
- Usar $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$ para eliminar t: $d\theta = \frac{C}{r^2}\,dt$

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta = \frac{dr}{d\theta}\,\frac{C}{r^2}\,\mathbf{u}_r + r\,\frac{C}{r^2}\,\mathbf{u}_\theta$$

Introduciendo $\frac{dr}{d\theta}\,\frac{1}{r^2} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$, queda más compacto:

$$\mathbf{v} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\,\mathbf{u}_r + \frac{C}{r}\,\mathbf{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^2 = C^2\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]}$$

1ª Fórmula de Binet

2ª Fórmula de Binet

- Conocidas $r(\theta)$ y C, hallar $\mathbf{a}(\theta)$ (solo a_r, pues $a_\theta = 0$).
- Usar $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$ para eliminar t: $d\theta = \frac{C}{r^2}\,dt$ [a]

$$a = a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\,\dot{\theta}^2 = \frac{d}{dt}\,\dot{r} - r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left[-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\frac{C}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} =$$

$$\boxed{a = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)\right]}$$

2ª Fórmula de Binet

[a] No se puede sustituir en la derivada 2ª, solo en la 1ª

[b] Otro camino: derivar $\mathbf{v}(\theta)$ y eliminar t. Pero se pierde tiempo calculando a_θ.

Ejemplo: problema de Kepler

Aplicar la 2ª fórmula de Binet a la aceleración gravitatoria:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}_r \qquad (GM = \mu) \quad a = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$-\frac{\mu}{\cancel{r^2}} = -\frac{C^2}{\cancel{r^2}}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)\right] \qquad \text{Cambio: } \frac{1}{r} = u$$

$$u'' + u = \frac{\mu}{C^2} \qquad \begin{cases} \text{Homogénea:} & u_h = A\cos(\theta + \varphi) \\ \text{Particular:} & u_p = \frac{\mu}{C^2} \end{cases}$$

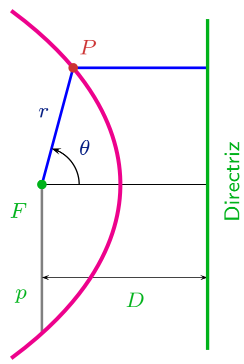
$$r = \frac{1}{u_c} = \frac{1}{u_p + u_h} = \frac{1}{\frac{\mu}{C^2} + A\cos(\theta+\varphi)}$$

$$r = \frac{C^2/\mu}{1 + \frac{AC^2}{\mu}\cos(\theta+\varphi)} = \frac{p}{1 + e\cos(\theta+\varphi)}$$

Ecuación polar de una cónica

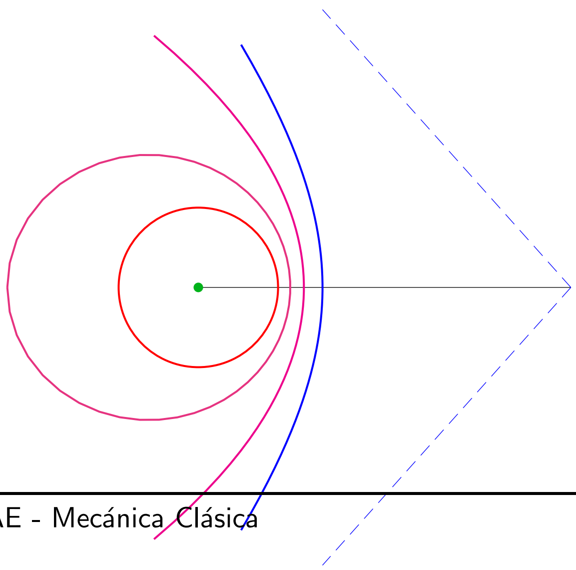
Ejemplo: problema de Kepler

Cónica: la distancia r de un punto P de la curva a un punto fijo (Foco), partida por la distancia de P a una recta fija (Directriz) es una constante (excentricidad):



$$\frac{r}{D - r\cos\theta} = e\,; \quad r = \overbrace{eD}^{p} - er\cos\theta \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$



$e = 0$ Circunferencia

$e < 1$ Elipse

$e = 1$ Parábola $r(\pi) \rightarrow \infty$

$e > 1$ Hipérbola $r(\arccos\frac{-1}{e}) \rightarrow \infty$