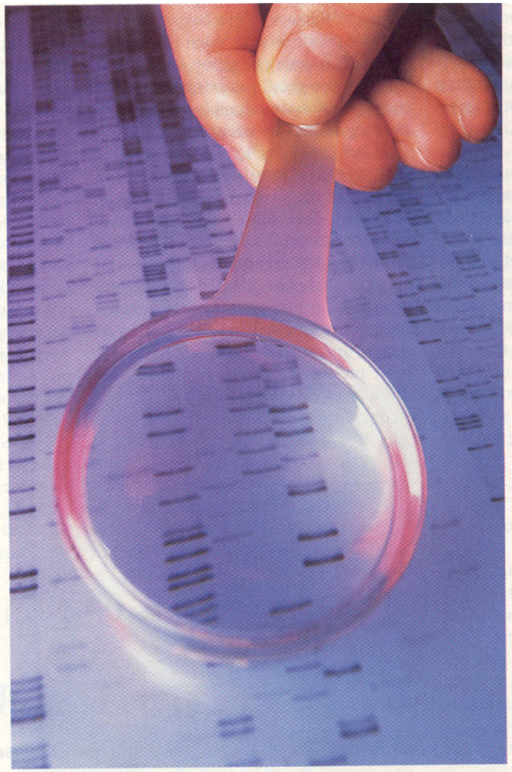
# Tensores cartesianos y propiedades de materiales anisótropos

# Propiedades de materiales anisótropos

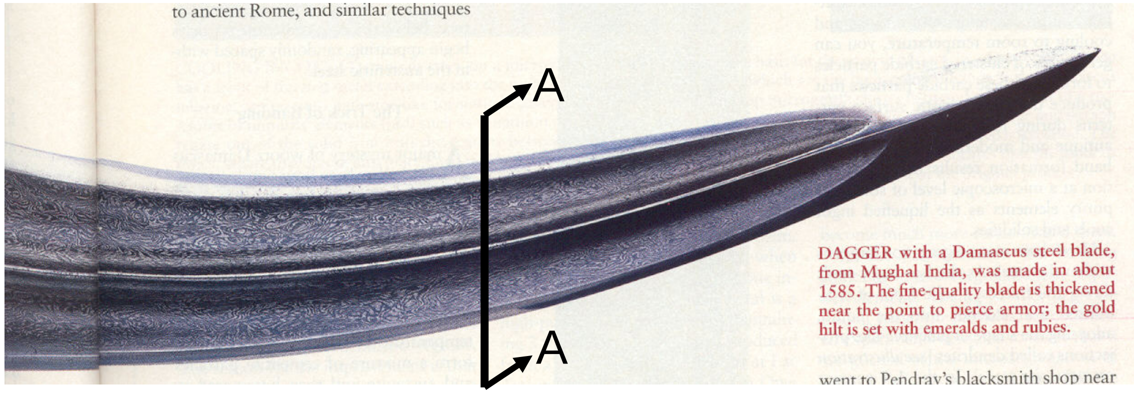
- Muchos usos tradicionales y avanzados de los materiales se basan en que *una o varias de sus propiedades físicas son diferentes en diferentes direcciones* (no tienen simetría rotacional)
- Es decir, son anisótropos
- Pero pueden ser homogéneos o heterogéneos según que posean o no simetría translacional.

# Ejemplos de materiales anisótropos



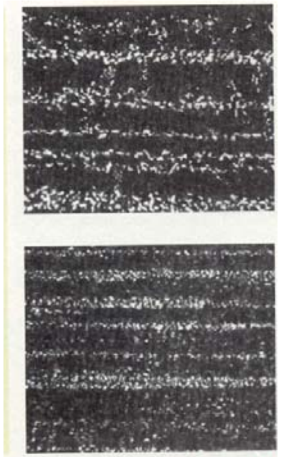
DETECTING A MISPRINT in your genes can alert you to potential diseases early enough for you to take preventive measures. But it can also get you fired, as surveys are showing. Legislation protecting private-sector employees has not gone anywhere.

Difusión diferencial en electroforesis



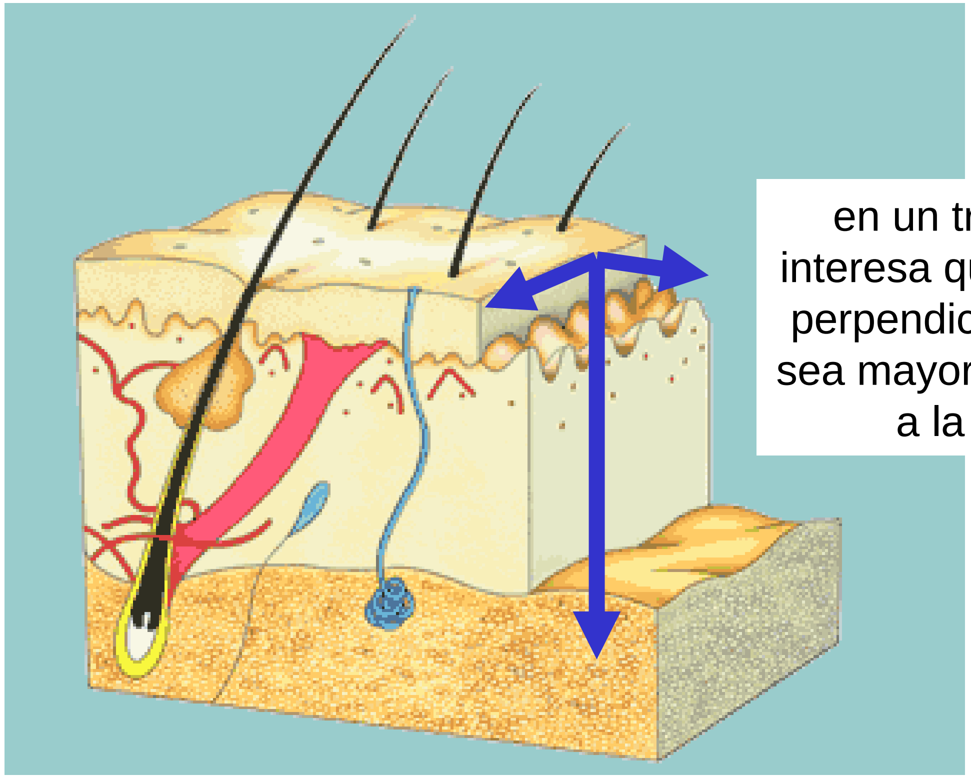

Materiales laminados

sección A-A



r the growth of particles of hard iron carbide
re the light-colored bands in the Damascus
graph shows light and dark bands in a sec-
nal Damascus sword. The lower micrograph
ugh the author's modern reconstruction. The
he two structures indicates that the modern
rate replication of the original process.

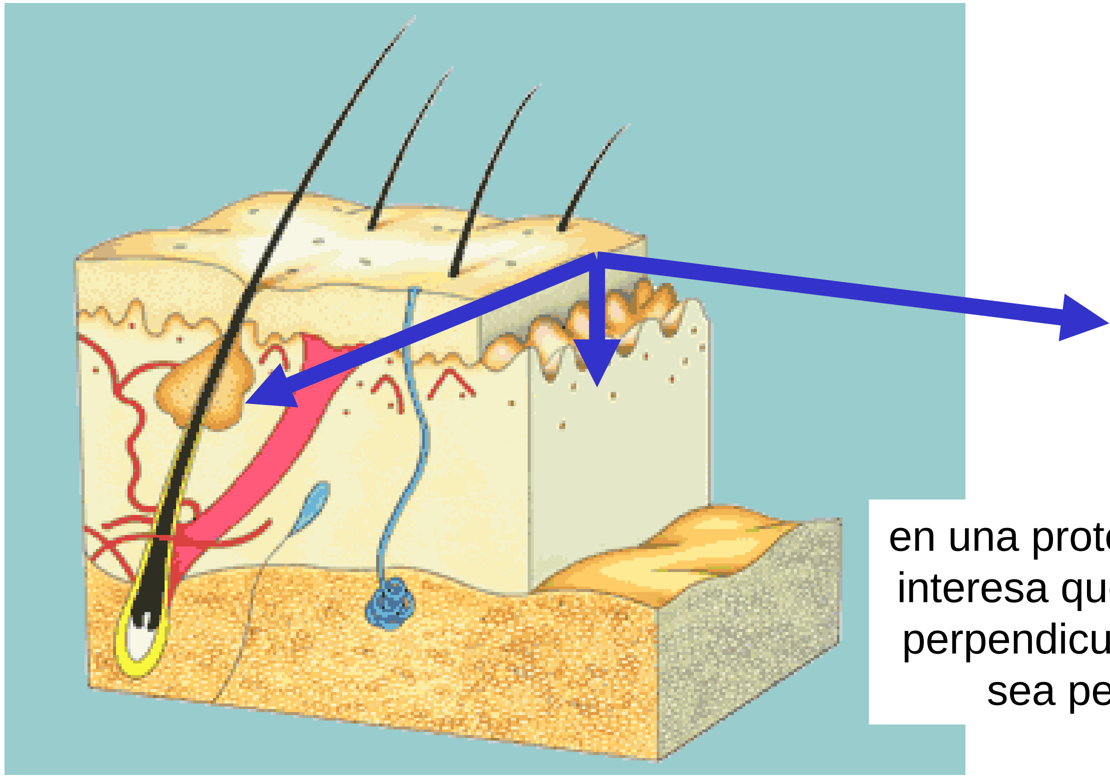
# Propiedades de materiales anisótropos



en un tratamiento interesa que la difusión perpendicular a la piel sea mayor que paralela a la misma

Difusión de medicamentos a través de la piel

# Propiedades de materiales anisótropos



en una protección solar interesa que la difusión perpendicular a la piel sea pequeña

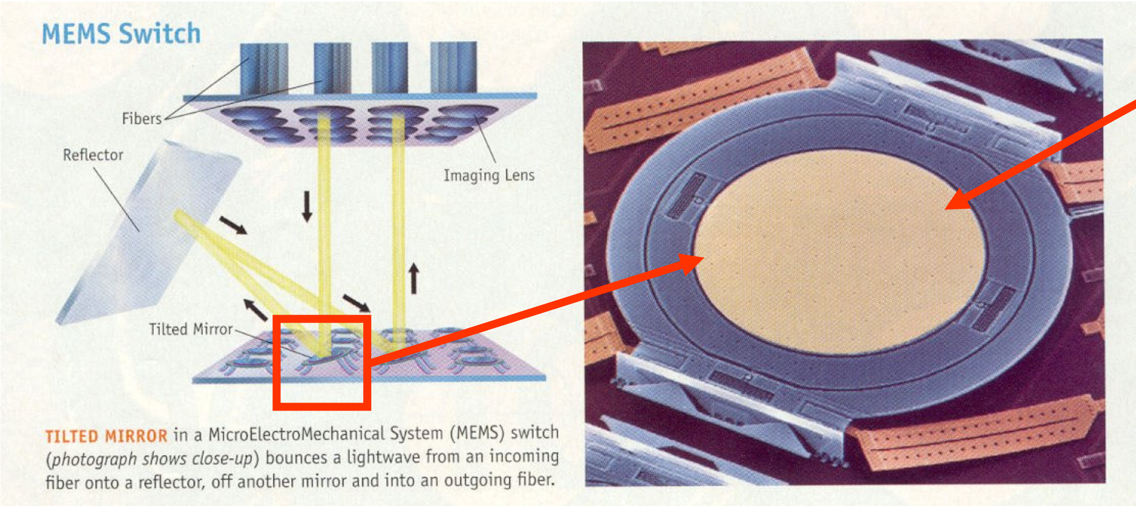
Difusión de medicamentos a través de la piel

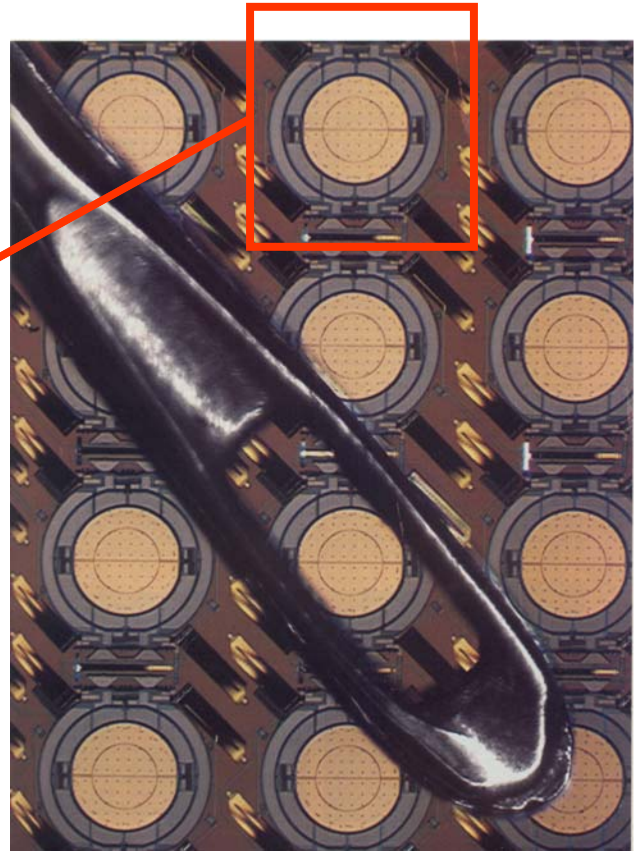
# Propiedades de materiales anisótropos

Ala de airbus compuesto (“composite”) epoxi-carbono

# Propiedades de materiales anisótropos

Multiplexador para fibra óptica

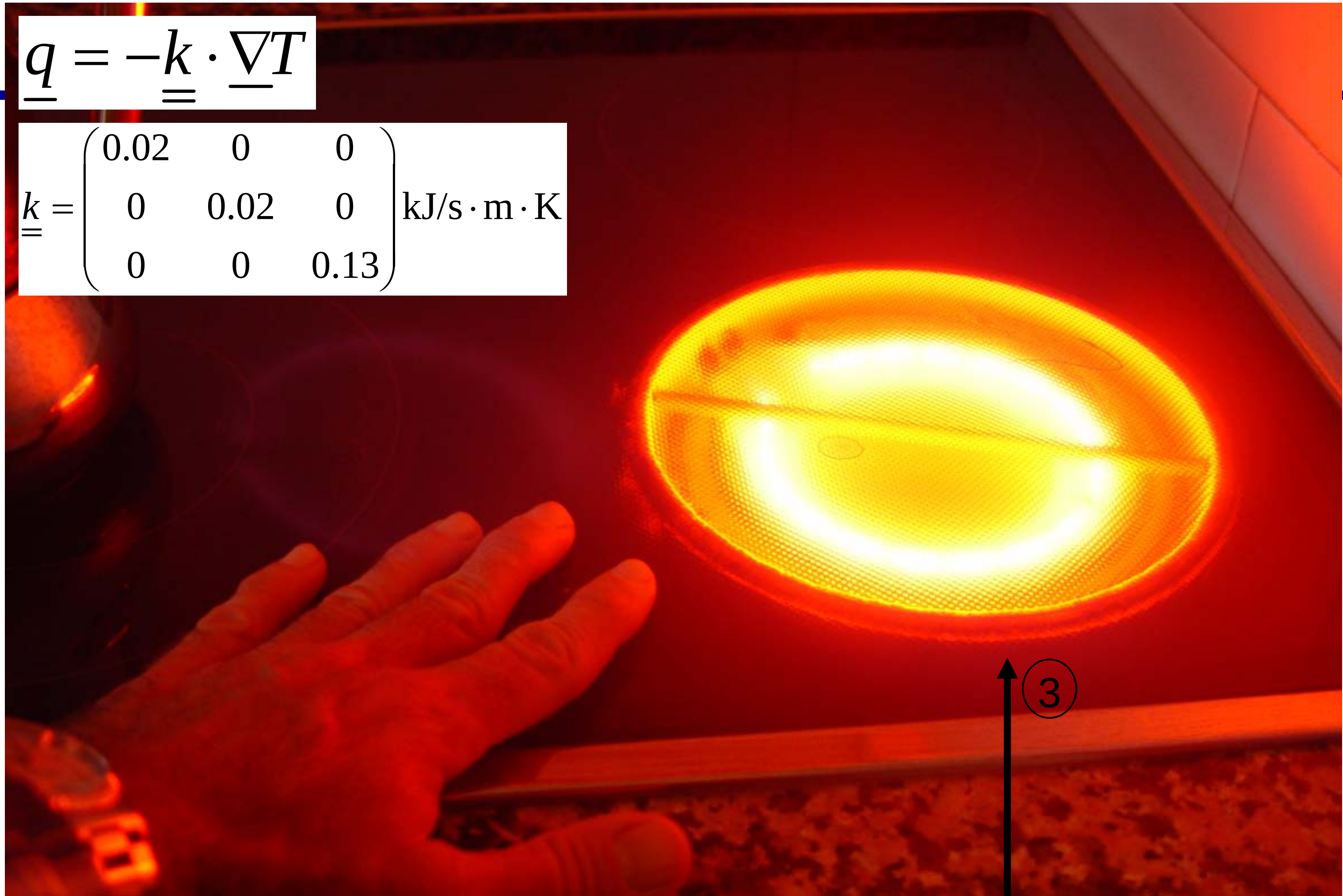


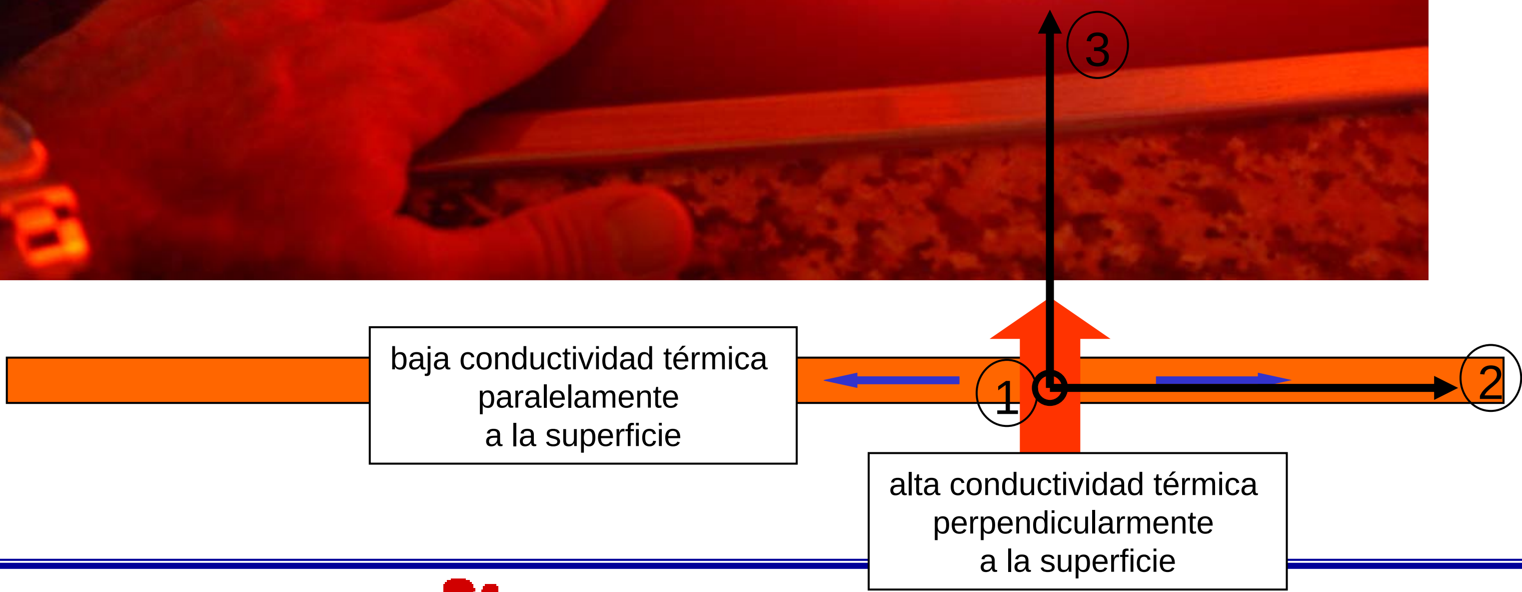



El movimiento de los microespejos
puede controlarse por medio
de la piezoelectricidad o
la termoelectricidad

$$\underline{q} = -\underline{\underline{k}} \cdot \underline{\nabla T}$$

$$\underline{\underline{k}} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{pmatrix} \mathrm{kJ/s \cdot m \cdot K}$$





# Propiedades de materiales anisótropos

## ➢ Algunas propiedades de materiales con apl. anisótropas:

- difusividad másica
- conductividad eléctrica
- conductividad térmica
- permeabilidad magnética
- expansión térmica
- actividad óptica
- efectos piezoeléctrico directo e inverso
- efecto Hall
- efectos Pockels y Kerr
- efecto termoeléctrico
- complianza y rigidez elásticas
- efecto piroeléctrico

# Tensores cartesianos

- Para poder hacer cálculos con materiales anisótropos es preciso adquirir un bagaje mínimo de cálculo tensorial*
- Distinguimos dos tipos de tensores:
  - ✓ **de materia**
    - representan propiedades físicas de un material
    - o coeficientes fenomenológicos en ecuaciones constitutivas
    - suelen ser los mismos en todos los puntos del espacio
  - ✓ **de campo**
    - representan soluciones de ecuaciones de campo
    - suelen ser distintos en cada punto del espacio

* en esta asignatura sólo se requieren conocimientos básicos de tensores cartesianos, es decir, los asociados a transformaciones de coordenadas no sólo lineales sino además ortogonales. En este caso la distinción entre tipos covariantes, contravariantes y mixtos desaparece, y el cálculo se reduce a la manipulación de diadas, triadas, etc. y no es necesario recurrir al tensor métrico. Por tanto estas notas son válidas **exclusivamente para tensores cartesianos**.

## ➢ Tensores de materia:

- difusividad másica
- conductividad eléctrica
- conductividad térmica
- permeabilidad magnética
- expansión térmica
- actividad óptica
- efectos piezoeléctrico directo e inverso
- efecto Hall
- efecto Kerr
- efecto termoeléctrico
- complianza
- rigidez

# Tensores cartesianos

- Tensores de campo de orden 1:
  - desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza

- de orden superior a 1 sólo estudiaremos:
  - tensor de esfuerzos
  - tensor gradiente de velocidad
  - tensor gradiente de desplazamiento

- El modo de operar con los de campo y de materia es el mismo

# Tensores cartesianos

- **Notación**
  - ✓ **el orden de un tensor es el número de subíndices que tiene**
  - ✓ **de modo informal, es una “tabla” de 1, 2, 3, ... dimensiones (tantas como el orden) que contiene, en general, $d^{\text{orden}}$ elementos, donde $d$ es la dimensión del espacio (en esta asignatura, 3)***
  - ✓ **denotaremos el orden subrayando la variable (propiedad, campo) tantas veces como su orden tensorial**

$$\underline{\underline{D}}$$

coeficiente de difusión
o
difusividad

es un tensor de materia
de segundo orden

$$\underline{\underline{\underline{d}}}$$

módulo
piezoeléctrico

es un tensor de materia
de tercer orden

* la definición rigurosa se vé más adelante

# Tensores cartesianos

## ➢ Ejemplos de tensores de materia

| **1$^{er}$ orden** | |
|---|---|
| $\underline{p}$ | coef. piroeléctrico ($C/m^2.K$) |

| **2º orden** | |
|---|---|
| $\underline{\underline{D}}$ | difusividad ($m^2/s$) |
| $\underline{\underline{\rho}}$ | resistividad eléctrica ($\Omega$.m) |
| $\underline{\underline{\sigma}}$ | conductividad eléctrica (S/m) |
| $\underline{\underline{k}}$ | conductividad térmica (W/m.K) |
| $\underline{\underline{\alpha}}$ | coef. de expansión térmica ($K^{-1}$) |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}$ | constante dieléctrica relativa (-) |

# Tensores cartesianos

## ➢ Ejemplos de tensores de materia

**3$^{er}$ orden**

- $\underline{\underline{\underline{d}}}$ módulo piezoeléctrico directo e inverso (C/N)
- $\underline{\underline{\underline{r}}}$ coef. electroóptico lineal (efecto Pockels) (m/V)
- $\underline{\underline{\underline{d}}}$ coef. de efecto Hall ($\Omega$.m/T)

**4º orden**

- $\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}$ complianza elástica (Pa$^{-1}$)
- $\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}$ rigidez elástica (Pa)
- $\underline{\underline{\underline{\underline{s}}}}$ coeficiente electroóptico cuadrático (efecto Kerr) (m$^2$/V)
- $\underline{\underline{\underline{\underline{\rho}}}}$ coeficiente magnetoresistivo (cuadrático) ($\Omega$.m/T$^2$)
- $\underline{\underline{\underline{\underline{\Pi}}}}$ coeficiente fotoelástico (-)

# Tensores cartesianos

## ➢ Ejemplos de tensores de campo

**1er orden**

$\underline{v}$ velocidad de un fluido (m/s)

$\underline{u}$ desplazamiento (m)

$\underline{E}$ campo eléctrico (V/m)

$\underline{J}_A$ flujo másico de A (kg/m$^2$ s, o kmol/m$^2$ s o átomos/m$^2$ s)

$\underline{P}$ polarización (C/m$^2$)

$\underline{J}$ densidad de corriente eléctrica (A/m$^2$)

**2º orden**

$\underline{\underline{\tau}}$ tensor de esfuerzos (Pa)

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ tensor deformación (-)

$\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ tensor velocidad de deformación (1/s)

# Tensores cartesianos

- Las operaciones con tensores de campo generalizan las relaciones ya conocidas entre escalares (tensores de orden 0) y vectores (orden 1). P.ej.:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}}\Delta T$$

deformación = coeficiente de expansión térmica x incremento de temperatura

• Cuando un material es isótropo, el coef. de expansión térmica es el mismo en todas las direcciones $\varepsilon = \alpha \Delta T$

• Un material no isótropo se deforma de modo diferente en diferentes direcciones $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\alpha}}\Delta T$

# Tensores cartesianos

- Muchas de las relaciones que conocemos en su versión escalar (para materiales isótropos) son en general tensoriales

$$\underline{J}_A = -\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\nabla} C_A$$

flujo másico = difusividad x gradiente de concentración

$$\underline{P} = \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}}$$

polarización eléctrica = módulo piezoeléctrico x esfuerzo

# Tensores cartesianos

- Reflejan p.ej. el hecho de que en la ley de Ohm, cada componente del campo eléctrico puede depender de todas las componentes de la densidad de corriente:

$$E_1 = \rho_{11} J_1 + \rho_{12} J_2 + \rho_{13} J_3$$
$$E_2 = \rho_{21} J_1 + \rho_{22} J_2 + \rho_{23} J_3$$
$$E_3 = \rho_{31} J_1 + \rho_{32} J_2 + \rho_{33} J_3$$

- o bien, p.ej. que en el efecto piezoeléctrico inverso, cada componente de la deformación puede depender de todas las componentes del campo aplicado:

$$\varepsilon_{11} = E_1 d_{111} + E_2 d_{211} + E_3 d_{311}$$
$$\varepsilon_{12} = E_1 d_{112} + E_2 d_{212} + E_3 d_{312}$$
$$\varepsilon_{13} = E_1 d_{113} + E_2 d_{213} + E_3 d_{313}$$
$$\text{etc ...}$$

# Tensores cartesianos

- Las direcciones coordenadas se especifican como 1, 2 y 3 (no como *x*,*y*,*z*)
- Usaremos varios tipos de productos entre tensores; estos productos (que se definen a continuación) se denotan por medio de símbolos como

$$\cdot \qquad : \qquad \vdots \qquad \times$$

- En ocasiones usaremos con estos productos tipos especiales de paréntesis para hacer patente la naturaleza (orden tensorial) del resultado de un producto:

$$(\,) = \text{escalar} \qquad [\quad] = \text{vector (tensor 1}^{\text{er}}\text{ orden)} \qquad \{\quad\} = \text{tensor 2}^{\text{o}}\text{ orden}$$

- El orden del resultado de un producto se obtiene del siguiente modo:

| signo de multiplicación | orden del resultado |
|---|---|
| ninguno | → suma de órdenes de los factores |
| $\times$ | → suma de órdenes de los factores - 1 |
| $\cdot$ | → suma de órdenes de los factores - 2 |
| $:$ | → suma de órdenes de los factores - 4 |
| $\vdots$ | → suma de órdenes de los factores - 6 |

# Tensores cartesianos

- Por ejemplo:

$$\underline{u}\,\underline{v} \quad \text{es de orden 1+1=2}$$

$$\left[\underline{u}\times\underline{v}\right] \text{ es de orden 1+1-1=1}$$

$$\left\{\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\tau}}\right\} \text{ es de orden 2+2-2=2}$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\tau}}\right) \text{ es de orden 2+2-4=0}$$

$$\left\{\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}\right\} \text{ es de orden 4+2-4=2}$$

# Tensores cartesianos

- Los vectores unitarios (cartesianos) se denotan como:

$$\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2, \underline{\delta}_3$$

- La delta de Kronecker o símbolo de Zehfuss como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

- El símbolo de permutación, o símbolo de Levi-Civita, o símbolo de Eddington*, como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad ijk = 123, 231 \text{ o } 312 \\ -1 & \text{si} \quad ijk = 321, 213 \text{ o } 132 \\ 0 & \text{si hay dos índices iguales} \end{cases}$$

* más exactamente, el símbolo de permutación es un pseudotensor (de tercer orden), del mismo modo que el resultado de un producto vectorial es un pseudotensor de 1er orden, pseudovector o vector axial; en contraposición con un vector polar, vector propiamente dicho o tensor de 1er orden; en esta asignatura no tendremos en cuenta la distinción entre tensores (paridad impar, que son invariantes bajo rotación) o pseudotensores (paridad par, que son invariantes bajo rotación y reflexión)

# Tensores cartesianos

- Se verifica: $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hjk} = 2\delta_{ih}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

- Un determinante 3×3 puede escribirse como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

# Tensores cartesianos

- Operaciones con vectores unitarios:

$$\left(\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j\right) = \delta_{ij} \qquad \text{(producto escalar)}$$

$$\left[\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j\right] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\underline{\delta}_k \qquad \text{(producto vectorial)}$$

- Expresión de un vector (tensor de 1er orden) en vectores unitarios:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{3} \underline{\delta}_i v_i$$

Esta expresión puede interpretarse como "*el tensor* $\underline{v}$*, en el lugar indicado por el índice* $i$*, contiene el valor (componente)* $v_i$ "

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \\ v_i \\ \\ \end{pmatrix} \longleftarrow \text{fila } i$$

- Magnitud de un vector (módulo): $\left|\underline{v}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$

# Tensores cartesianos

- **Convenio de sumación sobre índices repetidos (Einstein)**: *en un producto en el que aparece uno o varios índices repetidos (y no hay signos de sumatorio explícitos sobre esos índices), se entenderá que existe sumación sobre esos índices.* Esta convención es exactamente equivalente a mantener los sumatorios, pero elimina los signos de sumación y reduce notablemente la complejidad de las expresiones. P. ej. un vector puede escribirse como:

$$\underline{v} = \underline{\delta}_i v_i = \sum_{i=1}^{3} \underline{\delta}_i v_i \qquad\qquad |\underline{v}| = \sqrt{v_i v_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i v_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}$$

índice repetido $i$ ⇨ suma sobre este índice

Atención: en la expresión $\sqrt{v_i^2}$ NO hay índice repetido, por tanto no hay suma sobre $i$: $\sqrt{v_i^2} \neq \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = |\underline{v}|$

La expresión $v_i^2$ significa "el cuadrado de la $i$-ésima componente del vector" (donde el valor de $i$ no está especificado)

# Tensores cartesianos

- Operaciones con vectores:

escalar por vector: $s\underline{v} = s\underline{\delta}_i v_i = \underline{\delta}_i (s v_i)$

producto escalar de dos vectores: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (\underline{\delta}_i u_i) \cdot (\underline{\delta}_j v_j) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) u_i v_j = \delta_{ij} u_i v_j = u_i v_i$

(esta expresión contiene dos índices repetidos, es por tanto una doble suma con un total de 9 términos. De estos nueve términos, la $\delta$ de Kronecker selecciona los 3 términos que se indican)

producto vectorial: $\underline{u} \times \underline{v} = (\underline{\delta}_i u_i) \times (\underline{\delta}_j v_j) = \left[ \underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j \right] u_i v_j = \varepsilon_{ijk} \underline{\delta}_k u_i v_j = \varepsilon_{kij} \underline{\delta}_k u_i v_j =$

$$= \begin{vmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

# Tensores cartesianos

- Para tensores cartesianos de órdenes superiores se opera de modo análogo. En vez de vectores unitarios se utilizan diadas, triadas, tetradas, etc. unitarias:
- Las diadas unitarias son: $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j, \quad i, j = 1, 2, 3$ (hay 9)

$$\underline{\delta}_1\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_1\underline{\delta}_2, \underline{\delta}_1\underline{\delta}_3, \underline{\delta}_2\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2\underline{\delta}_2, \underline{\delta}_2\underline{\delta}_3, \underline{\delta}_3\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3\underline{\delta}_2, \underline{\delta}_3\underline{\delta}_3$$

- Las triadas unitarias son: $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3$ (hay 27)

- Las tetradas unitarias son: $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\underline{\delta}_k\underline{\delta}_l, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$ (hay 81)

y así sucesivamente para órdenes superiores

- El nombre de las diadas es "*delta i delta j*", el de las triadas es "*delta i delta j delta k*", etc. Es decir, la diada unitaria es el "bloque": $\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j$ etc.

# Tensores cartesianos

- Un tensor de 2º orden se expresa en función de sus componentes y de las diadas unitarias de modo absolutamente análogo a uno de 1er orden

$$\underline{\underline{\tau}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij}$$

(dos índices repetidos, doble suma, 9 términos)

Esta expresión puede interpretarse como "*en el tensor* $\underline{\underline{\tau}}$ *, en el lugar indicado por los índices* $ij$, *colocar el valor (componente)* $\tau_{ij}$ "

Representando el tensor de 2º orden como una matriz (**atención**: un tensor de 2º orden NO es una matriz; sus componentes se pueden representar como una matriz; la distinción se ve más adelante)

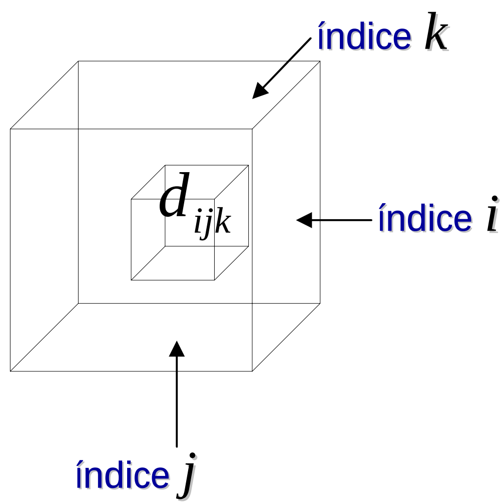
$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{ccc} & & \\ & & \tau_{ij} \\ & & \end{array} \right) & \leftarrow \text{fila } i \\ \uparrow & \\ \text{columna } j & \end{array}$$

# Tensores cartesianos

- Un tensor de 3er orden se expresa en función de sus componentes y de las triadas unitarias de modo absolutamente análogo a uno de 1er o de 2º orden $\underline{\underline{\underline{d}}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k d_{ijk} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k d_{ijk}$ (tres índices repetidos, triple suma)

Esta expresión puede interpretarse como "*en el tensor* $\underline{\underline{\underline{d}}}$*, en el lugar (componente) indicado por los índices* $ijk$*, colocar el valor* $d_{ijk}$ "

Representando un tensor de 3er orden como un cubo:



# Tensores cartesianos

- Operaciones con diadas unitarias: es una generalización directa de las operaciones con vectores unitarios:

$$\left.\begin{aligned}\left[\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k\right] &= \underline{\delta}_i (\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) = \underline{\delta}_i \delta_{jk} \\ \left[\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k\right] &= (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) \underline{\delta}_k = \underline{\delta}_k \delta_{ij}\end{aligned}\right\}$$

(productos escalares, o contracciones, de diada unitaria por vector unitario)

$$\left\{\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l\right\} = \underline{\delta}_i (\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) \underline{\delta}_l = \underline{\delta}_i \delta_{jk} \underline{\delta}_l = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l \delta_{jk}$$

(producto escalar, o contracción, de dos diadas unitarias

$$\left(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j : \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l\right) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) = \delta_{il} \delta_{jk}$$

(doble contracción de dos diadas unitarias)

  - Como regla general, cada “ · ” (llamada “contracción de índices” o producto interno) opera sobre los símbolos que están inmediatamente a su izquierda y a su derecha, es decir, es formalmente idéntico a un producto escalar de los dos vectores unitarios adyacentes al operador.

  - Cuando hay más de una contracción (p.ej. “ : ” es una doble contracción tensorial), se lleva a cabo la operación anterior tantas veces como contracciones haya.

# Tensores cartesianos

- Operaciones con triadas, tetradas, etc. unitarias: se aplica la regla general de la transparencia anterior hasta realizar todas las contracciones:

$$\left\{\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l\right\} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j (\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \delta_{kl}$$

producto, o contracción, de triada unitaria por vector unitario; resultado: tensor de 2º orden

$$\left[\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k : \underline{\delta}_l \underline{\delta}_m\right] = \underline{\delta}_i (\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_m) = \underline{\delta}_i \delta_{kl} \delta_{jm}$$

doble contracción de triada unitaria por diada unitaria; resultado: tensor de 1er orden

$$\left(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \,\vdots\, \underline{\delta}_l \underline{\delta}_m \underline{\delta}_n\right) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_n)(\underline{\delta}_k \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_m) =$$
$$= \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}$$

triple contracción de triada unitaria por triada unitaria; resultado: escalar, tensor de orden cero

# Tensores cartesianos

- Mientras que las contracciones anteriores reducen el orden del resultado respecto a la suma de órdenes de los factores, existe finalmente otro tipo de producto, el **producto diádico**, no conmutativo, de dos vectores, cuyo resultado es un tensor de segundo orden:

$$\underline{u}\underline{v} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j u_i v_j$$

$$\left(\underline{u}\underline{v} \neq \underline{v}\underline{u}\right)$$

Producto diádico de dos vectores. Se denota escribiendo los dos factores sin ningún signo de multiplicación entre ambos. Resultado: tensor de 2º orden (con 9 componentes, hay doble suma, sobre los dos índices repetidos)

- Usando las anteriores definiciones, el modo de realizar productos es:

Doble contracción de dos tensores de 2º orden:

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\tau}}\right) = \left(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}\right) : \left(\underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \tau_{kl}\right) = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_l)(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k)\sigma_{ij}\tau_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}\sigma_{ij}\tau_{kl} = \sigma_{ij}\tau_{ji}$$

de los términos que contiene esta expresión (hay cuatro índices repetidos y por tanto $3^4 = 81$ términos), las dos $\delta$ de Kronecker seleccionan los 9 ($=3^2$ doble suma) términos que se indican; es decir, aquéllos para los que $i=l$ y $j=k$, o lo que es lo mismo, en la penúltima expresión se identifican $i$ con $l$ y $j$ con $k$, puesto que tienen que ser iguales estos índices

# Tensores cartesianos

- Tensor de 2º orden por vector:

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{v}\right]=(\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\sigma_{ij})\cdot(\underline{\delta}_k v_k)=\underline{\delta}_i(\underline{\delta}_j\cdot\underline{\delta}_k)\sigma_{ij}v_k=\underline{\delta}_i\delta_{jk}\sigma_{ij}v_k=\underline{\delta}_i\sigma_{ij}v_j$$

es decir, el resultado es el vector cuya componente $i$-ésima vale: $\sigma_{ij}v_j=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}v_j$

Se puede comprobar que el modo de calcular este producto se corresponde exactamente con el modo de calcular el producto de una matriz por un vector columna.

los nombres de los índices pueden cambiarse a voluntad, con tal de hacerlo de modo consistente. Son variables “dummy” o etiquetas, es decir, el nombre particular que lleven es irrelevante

$$\left[\underline{v}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\right]=(\underline{\delta}_k v_k)\cdot(\underline{\delta}_i\underline{\delta}_j\sigma_{ij})=\underline{\delta}_j(\underline{\delta}_k\cdot\underline{\delta}_i)\sigma_{ij}v_k=\underline{\delta}_j\delta_{ki}\sigma_{ij}v_k=\underline{\delta}_j\sigma_{ij}v_i=\underline{\delta}_i\sigma_{ji}v_j$$

es decir, el resultado es el vector cuya componente $j$-ésima vale:

$$\sigma_{ij}v_i=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}v_i$$

Se puede comprobar que el modo de calcular este producto se corresponde exactamente con el modo de calcular el producto de un vector columna transpuesto (fila) por una matriz.

- Contracción de dos tensores de 2º orden:

$$\left\{ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\tau}} \right\} = (\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}) \cdot (\underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \tau_{kl}) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l (\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) \sigma_{ij} \tau_{kl} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_l \sigma_{ij} \tau_{jl}$$

es decir, el resultado es el tensor cuya componente $i,l$-ésima vale: $\sigma_{ij} \tau_{jl} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \tau_{jl}$

Se puede comprobar que el modo de calcular este producto se corresponde exactamente al modo de calcular el producto de dos matrices cuadradas 3×3.

- Escalar por tensor de 2º orden:

$$s\underline{\underline{\sigma}} = s(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \sigma_{ij}) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j s\sigma_{ij}$$

todas las componentes se multiplican por el escalar.

# Tensores cartesianos

- Tensor de 3er orden por tensor de 2º orden:

$$\left[\underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}}\right] = (\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l d_{jkl}) : (\underline{\delta}_m \underline{\delta}_n \tau_{mn}) = \underline{\delta}_j \delta_{lm} \delta_{kn} d_{jkl} \tau_{mn} = \underline{\delta}_j d_{jkl} \tau_{lk}$$

es decir, el resultado es el vector cuya componente $j$-ésima es: $d_{jkl}\tau_{lk} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} d_{jkl}\tau_{lk}$

La ley constitutiva de la piezoelectricidad directa es precisamente de esta forma:

$$\underline{P} = \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}}$$

esfuerzo a que se somete el material

polarización que aparece en el material

módulo piezoeléctrico del material

- Vector por tensor de 3er orden:

$$\left\{\underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}}\right\} = (\underline{\delta}_i E_i) \cdot (\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l d_{jkl}) = \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) E_i d_{jkl} = \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{ij} E_i d_{jkl} = \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l E_i d_{ikl}$$

es decir, el resultado es el tensor de 2º orden cuya componente $k,l$-ésima es: $E_i d_{ikl} = \sum_{i=1}^{3} E_i d_{ikl}$

La ley constitutiva de la piezoelectricidad inversa es precisamente de esta forma:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}}$$

módulo piezoeléctrico del material

deformación que aparece en el material

campo eléctrico a que se somete el material

# Tensores cartesianos

- Tensor de 4º orden por tensor de 2º orden:

$$\left\{\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right\} = (\underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \underline{\delta}_m c_{jklm}) : (\underline{\delta}_n \underline{\delta}_p \varepsilon_{np}) = \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \delta_{mn} \delta_{lp} c_{jklm} \varepsilon_{np} = \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k c_{jklm} \varepsilon_{ml}$$

es decir, el resultado es el tensor de 2º orden cuya componente $j,k$-ésima vale: $c_{jklm}\varepsilon_{ml} = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} c_{jklm}\varepsilon_{ml}$

La ley constitutiva de la elasticidad lineal (ley de Hooke) para materiales anisótropos es precisamente de esta forma:

esfuerzo que aparece en el material $\rightarrow$ $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ $\leftarrow$ deformación a que se somete al material

rigidez elástica

es decir: *esfuerzo = rigidez × deformación*

o bien en la forma: *deformación = complianza × esfuerzo*

deformación que aparece en el material $\rightarrow$ $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{\underline{\tau}}$ $\leftarrow$ esfuerzo a que se somete al material

complianza elástica

# Tensores cartesianos

- **Tensor simétrico en dos índices:** es un tensor de cualquier orden para el que se verifica: $\tau_{\dots jklm\dots} = \tau_{\dots jlkm\dots}$

  se dice que es ***simétrico*** en esos dos índices. Si se verifica: $\tau_{\dots jklm\dots} = -\tau_{\dots jlkm\dots}$

  el tensor es ***antisimétrico*** en esos dos índices.

- **Tensor transpuesto de un tensor de 2º orden:** si $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij}$

  **el tensor transpuesto es:** $\underline{\underline{\tau}}^\dagger = \underline{\delta}_j \underline{\delta}_i \tau_{ij}$

- **Tensor unitario de 2º orden:** sus componentes son 0 o 1 según: $\underline{\underline{\delta}} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \delta_{ij}$

  Se cumple: $\delta_{ii} = 3$

- **Módulo de un tensor de 2º orden:** $\left|\underline{\underline{\tau}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}}^\dagger\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}$ (doble sumatorio)

# Tensores cartesianos

- Invariante de un tensor de 1[er] orden: sólo tiene uno: $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_i v_i$

  (no depende del sistema de coordenadas)

- Invariantes de un tensor de 2º orden: es posible definir tres cantidades que son independientes del sistema de coordenadas utilizado: las trazas de las tres primeras potencias del tensor:

$$I = tr(\underline{\underline{\tau}}) = \tau_{ii}$$

$$II = tr(\underline{\underline{\tau}}^2) = tr(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\tau}}) = \tau_{ij}\tau_{ji}$$

$$III = tr(\underline{\underline{\tau}}^3) = tr\left((\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\tau}}) \cdot \underline{\underline{\tau}}\right) = \tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ki}$$

Es posible definir otros invariantes (cualquier función de estos invariantes es evidentemente invariante), pero están necesariamente relacionados con éstos, de modo que sólo existen tres independientes. También suelen emplearse estos:

$$I_1 = I$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I^2 - II)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(I^3 - 3I \cdot II + 2III) = \det(\underline{\underline{\tau}})$$

# Tensores cartesianos

- Con el operador diferencial "nabla" o "del": $\underline{\nabla} \equiv \underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ (cartesiano) podemos definir:

- Gradiente de un campo escalar: $\underline{\nabla} s = \underline{\delta}_i \dfrac{\partial s}{\partial x_i}$
  (vector o tensor de 1er orden)

  Atención, algunos textos definen el gradiente de un campo vectorial como: $\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$

- Gradiente de un campo vectorial: $\underline{\nabla}\,\underline{v} = \left( \underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( \underline{\delta}_j v_j \right) = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$
  (tensor de 2º orden)

- Divergencia de un campo vectorial: $\left( \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \right) = \left( \underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \underline{\delta}_j v_j \right) = \delta_{ij} \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$
  (escalar o tensor de orden cero)

- Divergencia de un campo tensorial de 2º orden (vector o tensor de orden uno) $\left[ \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] = \left( \underline{\delta}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \tau_{jk} \right) = \underline{\delta}_k \delta_{ij} \dfrac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \underline{\delta}_k \dfrac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i}$

# Tensores cartesianos

- Ejemplo, la ecuación constitutiva del fluido newtoniano es: $\underline{\underline{\tau}} = -\mu\left[\nabla \underline{v} + \left(\nabla \underline{v}\right)^{\dagger}\right]$

  o, en componentes: $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \tau_{ij} = -\mu \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$

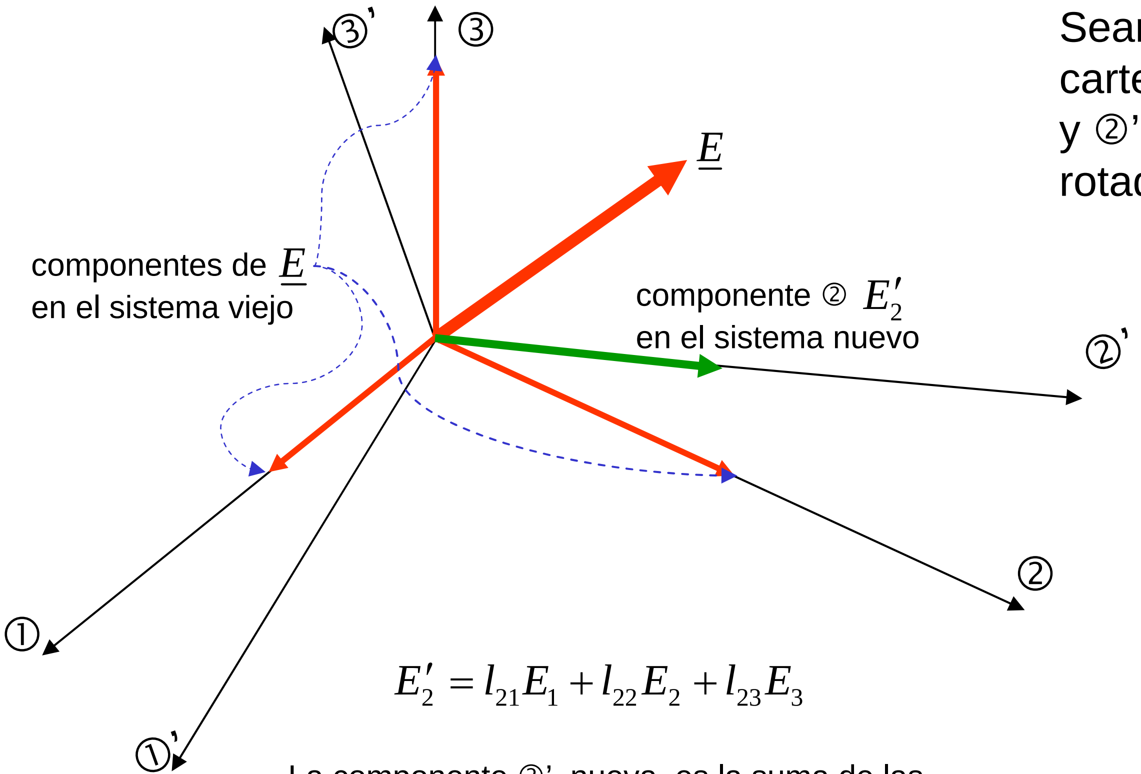
- Es decir, si nos dan el campo de velocidad en todos los puntos de un fluido, $\underline{v}(x_1, x_2, x_3)$ podemos calcular qué esfuerzo aparece en cada punto de este fluido. En representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

que es simétrico

# Tensores cartesianos

- La definición de tensor cartesiano se basa en su comportamiento bajo una rotación de ejes coordenados (cartesianos):




La componente ②', nueva, es la suma de las proyecciones de las componentes viejas sobre el nuevo eje ②'

Sean ①③② un sistema de ejes cartesianos (el sistema "viejo") y ①', ③' y ②' otro sistema (el sistema "nuevo") rotado respecto al primero.

Sea $l_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$ el coseno del ángulo que forman los ejes $i$ nuevo y $j$ viejo.

Un vector $\underline{E}$ cuyas componentes $E_i$ son conocidas en el sistema viejo tiene como componentes en el sistema nuevo: $E_i' = l_{ij}E_j$ (suma sobre índice repetido)

# Tensores cartesianos

- Esta regla de transformación $E'_i = l_{ij} E_j$ garantiza que el vector $\underline{E}$ (por ejemplo un campo eléctrico) mantiene su significado físico antes y después de la transformación, es decir, representa la misma magnitud física (que necesariamente debe ser independiente del sistema de coordenadas).
- Los cosenos que definen la transformación de sistema de coordenadas pueden representarse como una matriz ortogonal:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \quad \text{que cumple} \quad \underset{\sim}{L}^{\dagger} = \underset{\sim}{L}^{-1} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}$$

  Las filas de $\underset{\sim}{L}$ son las componentes de los vectores unitarios nuevos expresados en el sistema antiguo.
- La matriz de la transformación inversa, del sistema nuevo al viejo, es $\underset{\sim}{L}^{-1} = \underset{\sim}{L}^{\dagger}$

  (la matriz de tranformación **no** es un tensor. Las matrices se denotarán por un subrayado con tilde: $\underset{\sim}{L}$ )

# Tensores cartesianos

- Aunque las componentes de $\underline{E}$ cambian (se transforman) de valor numérico al rotar los ejes, si la transformación es la indicada, los valroes numéricos de las nuevas componentes son tales, que el vector se mantiene invariable en el espacio.
- Este requerimiento **físico** es la base de la definición **matemática** de un tensor cartesiano de primer orden: se define como una magnitud cuyas componentes, al rotar el sistema de referencia por medio de $\underset{\sim}{L}$ , se transforman como: $\boxed{E_i' = l_{ij} E_j}$ (*)
- Desde el punto de vista físico, debe existir un modo de verificar que efectivamente se cumple (*). Por ejemplo, si se miden las componentes de $\underline{E}$ antes y después de rotar el sistema de referencia y se observa que se cumple (*), entonces $\underline{E}$ es un tensor de primer orden. En caso contrario, no lo es.

# Tensores cartesianos

- Por tanto, cabe preguntarse ¿cómo se transforman las componentes de magnitudes como la difusividad anisotrópica, la rigidez elástica, etc?
- Tomando como ejemplo la ley de Ohm: $\underline{E} = \underline{\underline{\rho}} \cdot \underline{J}$ , o bien por componentes: $E_i = \rho_{ij} J_j$ , puesto que tanto el campo eléctrico como la densidad de corriente eléctrica son tensores de 1er orden, se transforman como:

$$E_i' = l_{ij} E_j \qquad E_i = l_{ji} E_j'$$
$$J_i' = l_{ij} J_j \qquad J_i = l_{ji} J_j'$$

- **Experimentalmente** se ha comprobado que la ley de Ohm es válida independientemente del sistema de coordenadas, es decir en ambos:

$$E_i = \rho_{ij} J_j \qquad E_i' = \rho_{ij}' J_j'$$

donde las magnitudes con ´ están expresadas en el sistema nuevo.

## ➢ Podemos por tanto escribir:

Ley de Ohm en el sistema nuevo → $E'_i = \rho'_{il} J'_l$

transformación de $\underline{E}'$ al sistema viejo

transformación de $\underline{J}$ al sistema nuevo

$$E'_i = l_{ij} E_j = l_{ij} \rho_{jk} J_k = l_{ij} \rho_{jk} l_{lk} J'_l = l_{ij} l_{lk} \rho_{jk} J'_l$$

Ley de Ohm en el sistema viejo

igualando

se deduce que las componentes de las dos resistividades en los dos sistemas deben estar relacionadas por:

$$\rho'_{il} = l_{ij} l_{lk} \rho_{jk}$$

Sólo de esta manera se garantiza que:

• el campo y la densidad de corriente mantengan su significado físico (sean tensores de 1$^{er}$ orden)

• se cumpla la ley de Ohm en los dos sistemas de referencia, es decir, la resistividad eléctrica mantenga su significado físico (sea magnitud tensorial de 2º orden)

## Tensores cartesianos

- La definición de un tensor de 2º orden es por tanto: una magnitud cuyas componentes, al rotar el sistema de referencia por medio de $\underset{\sim}{L}$ se transforman como: $\boxed{T'_{ij} = l_{ik} l_{jl} T_{kl}}$
- Por un procedimiento análogo (p.ej. usando la ley constitutiva de la piezoelectricidad inversa $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}}$ ) se verifica que la definición de un tensor de 3er orden debe ser: una magnitud cuyas componentes, al rotar el sistema de referencia por medio de $\underset{\sim}{L}$ se transforman como:

$$\boxed{T'_{ijk} = l_{il} l_{jm} l_{kn} T_{lmn}}$$

en el 2º miembro de esta expresión hay tres índices repetidos, por tanto es una suma triple, sobre cada uno de ellos, y por tanto contiene $3^3$=27 términos. Es decir, para calcular cada uno de los 27 términos del tensor en el nuevo sistema, es preciso sumar 27 productos como el indicado.

Y para 4º orden:

$$\boxed{T'_{ijkl} = \underbrace{l_{im} l_{jn} l_{kp} l_{lq}}_{} T_{mnpq}}$$

el número de factores es igual al orden del tensor.

Igualmente, para calcular cada uno de los 81 términos de un tensor de 4º orden en el nuevo sistema, es preciso sumar 81 productos como el indicado.

# Tensores cartesianos

- Es importante apreciar que las leyes de transformación de tensores de cualquier orden son lineales en las componentes. Es decir, las componentes nuevas dependen de las viejas a través de funciones lineales homogéneas

- Sin embargo, la dependencia espacial, es decir, cómo varían las distintas componentes al variar la orientacion de los eje nuevos, es mucho más complicada, debido a la presencia de productos de cosenos. Esta dependencia es tanto más complicada cuanto mayor sea el orden:

dependencia lineal entre
componentes

$$\boxed{T'_{ijk} = l_{il} l_{jm} l_{kn} T_{lmn}}$$

las componentes nuevas
dependen de los cosenos
directores cúbicamente

# Tensores cartesianos

- Por tanto cabe esperar que la dependencia espacial (anisotropía) de propiedades tensoriales de orden alto sea complicada

- El ejemplo más característico es el de las propiedades elásticas lineales de materiales anisótropos (ver probs. en Cap. 9) ⇨ el diseño de estructuras con materiales compuestos, o anisótropos en general, es complicado

# Tensores cartesianos

- Como consecuencia de la linealidad, la mayoría de las propiedades enumeradas en la transp. 9 corresponden a leyes constitutivas lineales:

p.ej. ⟶
$$\begin{cases} \underline{J}_A = -\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\nabla} C_A \\ \underline{P} = \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}} \end{cases}$$

- Pero es perfectamente posible formular leyes constitutivas no lineales usando términos de orden superior, por medio de productos diádicos;

p.ej.:

$$\Delta \underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\underline{r}}} \cdot \underline{E} + \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{E}\underline{E}$$

$$\Delta \eta_{ij} = r_{ijk} E_k + s_{ijkl} E_k E_l$$

(describe la variación en el índice de refracción de un material al someterlo a un campo eléctrico)

impermeabilidad óptica (-)

coef. electroóptico lineal (efecto Pockels) (m/V)

coeficiente electroóptico cuadrático (efecto Kerr) ($m^2/V$)

# Tensores cartesianos

- Otro ejemplo es la magnetorresistividad (variación en la resistividad de un material al someterlo a un campo magnético, efecto cuadrático en la inducción magnética), que es el principio físico en el que se basa el almacenamiento (lectura) de información en discos duros.

$$\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{\rho}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{\rho}}}} : \underline{B}\,\underline{B}$$

$$\rho_{ij} = \rho^0{}_{ij} + \rho_{ijkl} B_k B_l$$

coeficiente magnetoresistivo (cuadrático) ($\Omega$.m/T$^2$)

campo magnético (inducción magnética) (T)

# Tensores cartesianos

- Una de las ventajas de formular leyes físicas usando exclusivamente magnitudes tensoriales es que estas leyes son válidas en cualquier $\underset{\sim}{L}$ sistema de coordenadas (en este caso, cartesianas), es decir, son independientes del sistema en que las expresemos.

- Los conceptos anteriores pueden generalizarse a coordenadas curvilíneas y a espacios no euclídeos con un esfuerzo moderado; estos tensores más generales no son necesarios en esta asignatura.

# Tensores cartesianos

- La transformación de tensores de 2º orden puede escribirse también como:

$$T'_{ij} = l_{ik} l_{jl} T_{kl}$$

$$\underline{\underline{T}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{T}}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger}$$

donde la 2ª expresión hay que entenderla como el producto de la matriz de transformación y su traspuesta (inversa) por el tensor estando éste escrito como matriz.

- Para tensores de orden superior existen expresiones que usan productos con la matriz de rotación (es decir, análogas a $\underline{\underline{T}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{T}}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger}$ ) pero no son prácticas. Es preferible usar la ley de transformación general.

# Tensores cartesianos

- Al rotar los ejes, el tensor unitario se transforma de esta manera:

$$\delta'_{ij} = l_{ik} l_{jl} \delta_{kl} = l_{ik} l_{jk} = \delta_{ij}$$

o bien:

$$\underline{\underline{\delta}}' = \underset{\sim}{L}\,\underline{\underline{\delta}}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{L}^{\dagger} = \underline{\underline{\delta}}$$

es decir, sus componentes son las mismas sea cual sea la orientación del sistema de referencia

- es por tanto un **tensor de 2º orden isótropo** (no es un escalar);
- físicamente sirve
  - ✓ **para describir tensores de campo de 2º orden isótropos (p.ej. presión hidrostática)**
  - ✓ **o propiedades de 2º orden de materiales isótropos (p.ej. la conductividad eléctrica de un material policristalino no orientado)**

- Igualmente, para expresar propiedades de 4º orden de materiales isótropos (p.ej. la complianza elástica de un material policristalino no orientado) existen **tres tensores de 4º orden isótropos** :

$$\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}} \equiv \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \equiv \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{I^T}}}} \equiv \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l \delta_{il} \delta_{jk}$$

- Los dos últimos son unitarios en el sentido de que para cualquier tensor $\underline{\underline{A}}$ de orden igual o superior a 2 se cumple:

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\underline{\underline{I^T}}}} = \underline{\underline{A}}^T ; \quad \underline{\underline{\underline{\underline{I^T}}}} : \underline{\underline{A}} = {}^T\underline{\underline{A}}$$

transposición de la última pareja de índices

$$\underline{\underline{A}}^{T} \qquad {}^{T}\underline{\underline{A}}$$

transposición de la primera pareja de índices

# Tensores cartesianos

- Podemos verificar que cada uno de ellos se mantiene invariante al aplicar cualquier rotación de ejes, es decir, es el mismo en todas las direcciones y pertenece a la clase límite $\infty\infty m$ . Por ejemplo:

$$\left(\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}}\right)'_{mnpq} = l_{mi} l_{nj} l_{pk} l_{ql} \delta_{ij} \delta_{kl} = \underbrace{l_{mi} l_{ni}} \underbrace{l_{pk} l_{qk}} = \delta_{mn} \delta_{pq} = \left(\underline{\underline{\delta}}\,\underline{\underline{\delta}}\right)_{mnpq}$$

producto escalar de las filas $m$ y $n$ de la matriz de cambio de base

producto escalar de las filas $p$ y $q$ de la matriz de cambio de base

(recordar que el producto escalar de dos filas o dos columnas de la matriz de cambio de base es:
- 0 si son distintas filas o distintas columnas
- 1 si las dos son la misma fila o la misma columna)

y análogamente para los otros dos.

# Tensores cartesianos

- Podemos también verificar que los dos últimos son unitarios :

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} = \left( \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j A_{ij} \right) : \left( \underline{\delta}_m \underline{\delta}_n \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q \delta_{mq} \delta_{np} \right) =$$

$$\underline{\delta}_p \underline{\delta}_q A_{ij} \delta_{mq} \delta_{np} \delta_{in} \delta_{jm} = \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q A_{pq} = \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^T = \left( \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j A_{ij} \right) : \left( \underline{\delta}_m \underline{\delta}_n \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q \delta_{mp} \delta_{nq} \right) =$$

$$\underline{\delta}_p \underline{\delta}_q A_{ij} \delta_{mp} \delta_{nq} \delta_{in} \delta_{jm} = \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q A_{qp} = \underline{\underline{A}}^T$$

y análogamente para los dos productos por la izquierda. También se observa que el producto por $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$ o por $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}^T$ sólo afecta a los dos primeros o a los dos últimos índices de $\underline{\underline{A}}$. Si $\underline{\underline{A}}$ es de orden mayor que dos, el resto de los índices queda inalterado y la transposición se refiere sólo a los dos primeros o dos últimos índices respectivamente.

# Tensores cartesianos

- El efecto del producto de un tensor de segundo orden por $\underline{\underline{\delta\delta}}$:

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\delta\delta}} = \left(\underline{\delta}_i \underline{\delta}_j A_{ij}\right) : \left(\underline{\delta}_m \underline{\delta}_n \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q \delta_{mn} \delta_{pq}\right) =$$

$$\underline{\delta}_p \underline{\delta}_q A_{ij} \delta_{mn} \delta_{pq} \delta_{in} \delta_{jm} = \underline{\delta}_p \underline{\delta}_q \delta_{pq} A_{mm} = tr(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{\delta}}$$

es producir otro tensor de segundo orden cuyos elementos diagonales son todos iguales a la traza de $\underline{\underline{A}}$ y el resto nulos. Es decir, produce un tensor isótropo de 2º orden que es $tr(\underline{\underline{A}})$ veces el tensor unitario (isótropo) de 2º orden.

# Tensores cartesianos

**Nota final**: las magnitudes tensoriales escritas en notación de Voigt (ver 02_01_01), aunque más fáciles de manipular (matrices y vectores ordinarios), pierden su carácter tensorial porque NO se transforman como tensores.

Es preciso tener siempre en cuenta esta circunstancia: si se realiza una rotación del sistema de referencia, las magnitudes escritas en notación de Voigt dejan de ser válidas en el nuevo sistema.