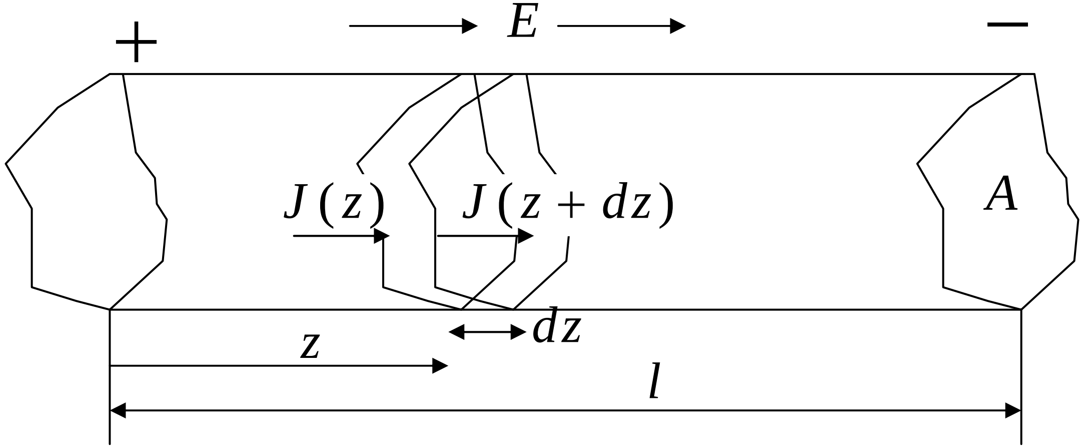
Problema 05_01_02

- De la ecuación de conservación de carga eléctrica (balance en estado estacionario sobre una sección diferencial) y la ley de Ohm microscópica, deducir la Ley de Ohm macroscópica para:
  - un conductor cilíndrico recto de sección constante.
  - un conductor de sección variable conocida $A(z)$.
  - un material cuadrático (no obedece la ley de Ohm) para el que: $E = \rho^* J^2$

El balance de carga (ec. de conservación) lo llevamos a cabo en una sección diferencial (análogo a lo explicado en el capítulo 4 para difusión másica y conservación de masa) de un conductor de sección constante. El balance de carga en estado estacionario es:

$$J(z) - J(z+dz) = 0$$

(no hay acumulación). Por tanto:



$$A\frac{dJ(z)}{dz} = 0$$

$$J(z) = cte.$$

Aplicando la ley de Ohm microscópica (ec. constitutiva): $E = \rho J$

$$\frac{E(z)}{\rho} = cte.$$

Problema 05_01_02

Por la definición de campo eléctrico: $$\frac{E(z)}{\rho} = cte. \Rightarrow E(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = cte'.$$

Integrando: $V(z) = C_1 z + C_2$

con condiciones de contorno: $V(0) = V_0$, $V(l) = 0$

$$\boxed{V(z) = V_0(1 - z/l)}$$

y por tanto:

$$\boxed{E(z) = -\frac{dV(z)}{dx} = V_0/l}$$

$$\boxed{J(z) = \frac{1}{\rho}E(z) = V_0/(l\rho)}$$

y la intensidad de corriente es:

$$i(z) = AJ(z) = AV_0/(l\rho) = \frac{V_0}{\rho\frac{l}{A}} = \frac{V_0}{R}$$

R

Es decir,

- el **campo eléctrico**, la **densidad de corriente** y la **intensidad de corriente** son **constantes** en todo el conductor.
- la **diferencia de potencial varía linealmente** a lo largo del conductor
- la **resistencia** del conductor está dada por la **fórmula ya conocida**

Problema 05_01_02

Si el conductor es de sección variables, el balance de carga en estado estacionario es:

$$J(z)A(z) - J(z+dz)A(z+dz) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(JA)}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad J(z)A(z) = C_1 \ (\text{constante})$$

Por tanto: $$E(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = \rho J(z) = \frac{\rho C_1}{A(z)} \quad \Rightarrow \quad V(x) = -\rho C_1 \int_0^x \frac{1}{A(z)} dz + C_2$$

Las constantes de integración se obtienen de las condiciones de contorno del potencial:

$$\left.\begin{array}{l} V(0) = V_0 = C_2 \\ V(l) = 0 = -\rho C_1 \int_0^l \frac{1}{A(z)} dz + V_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{V_0}{\rho \int_0^l \frac{1}{A(z)} dz} \end{array}\right\} \Rightarrow V(x) = V_0 \left(1 - \frac{\int_0^x \frac{1}{A(z)} dz}{\int_0^l \frac{1}{A(z)} dz} \right)$$

El campo eléctrico es entonces: $$E(z) = -\frac{dV(z)}{dx} = \frac{V_0}{\int_0^l \frac{1}{A(z)} dz} \frac{1}{A(z)}$$

Y la intensidad de corriente: $$I(z) = A(z)J(z) = A(z)\frac{1}{\rho}E(z) = \frac{V_0}{\rho \int_0^l \frac{1}{A(z)} dz}$$

Problema 05_01_02

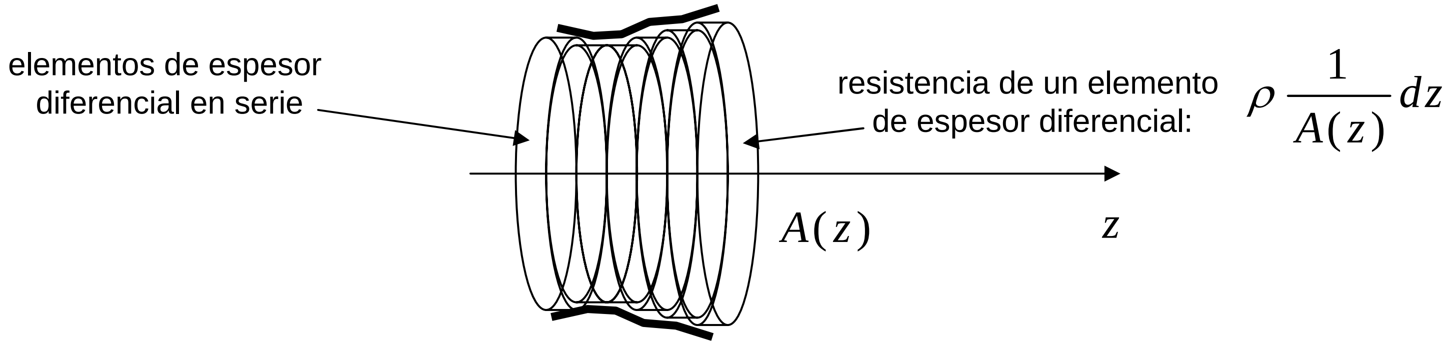
$$\boxed{I(z) = \frac{V_0}{\rho \int_0^l \frac{1}{A(z)} dz}}$$

De este resultado se deduce que para un conductor de sección variable:

- la intensidad de corriente es igualmente constante (por conservación de carga)
- también se obtiene la ley de Ohm macroscópica si se define la resistencia del conductor de sección variable del siguiente modo:

$$I = \frac{V_0}{R}; \qquad R \equiv \rho \int_0^l \frac{1}{A(z)} dz$$

Esta definición de la resistencia para un conductor de sección variable podría haberse escrito directamente considerando el conductor de sección variable como una serie de secciones cilíndricas rectas de espesor diferencial conectadas en serie (sus resistencias se suman en la integral):



(Nota: el cálculo de este apartado sólo válido si la variación de la sección transversal no es muy brusca a lo largo del conductor. Si la variación de sección no es pequeña, el problema no puede considerarse unidimensional y se complica).

Problema 05_01_02

Para un material cuadrático, el balance es exactamente el mismo (la ecuación de conservación de carga y la ecuación constitutiva son independientes), pero cambia la relación entre campo y densidad de corriente eléctrica. Por tanto:

$$J(z) = cte.$$

Aplicando la ec. constitutiva dada: $E = \rho^* J^2$ (En esta ec. constitutiva, la unidad de ρ^* no es el ohmio, sino $Vm^3/A^2=\Omega m^3/A$)

se obtiene nuevamente: $E(z) = cte. \quad \Rightarrow \quad V(z) = V_0(1 - z/l)$

(la variación lineal del voltaje no depende de la ec. constitutiva, sino sólo de que la sección transversal del conductor sea constante).

$$E(z) = -\frac{dV(z)}{dx} = V_0 / l$$

$$J(z) = \sqrt{\frac{1}{\rho^*} E(z)} = \sqrt{\frac{V_0}{l\rho^*}} \quad \Rightarrow \quad I(z) = J(z)A = \frac{A}{\sqrt{l\rho^*}} V_0^{1/2}$$

En este caso cabría definir la "resistencia" del conductor como: $\boxed{R^* = \frac{A}{\sqrt{l\rho^*}}}$

y se obtendría una ley macroscópica: $\boxed{I = R^* V_0^{1/2}; \quad V_0 = \left(\frac{I}{R^*}\right)^2}$

Esta relación macroscópica no tiene lógicamente nada que ver con la ley de Ohm. En este caso, la relación microscópica cuadrática entre campo y densidad de corriente resulta en una relación no lineal (igualmente cuadrática) entre diferencia de potencial e intensidad de corriente. Las ecuaciones constitutivas no son válidas universalmente (al contrario que las de conservación), y no todos los materiales tienen un comportamiento eléctrico óhmico.