Tema 3: Análisis y diseño de sistemas continuos lineales mediante el lugar de las raíces

En este punto debes tener claro lo siguiente:

Las características básicas de la respuesta transitoria de una función de transferencia de lazo cerrado dependen de la localización de sus polos

Si el sistema tiene ganancia variable, el valor de ésta determina la localización de los polos

Para diseñar un sistema cumpliendo ciertas especificaciones debemos conocer cómo se mueven los polos en el plano *s* al variar la ganancia

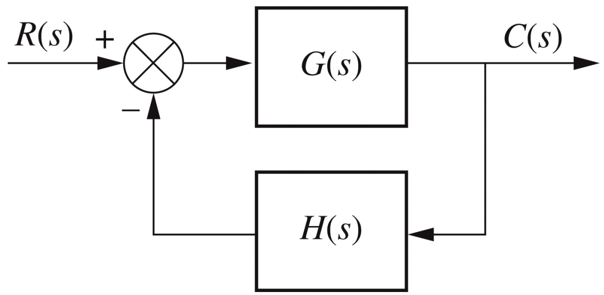
En algunos casos es posible que el ajuste de la ganancia permita mover los polos del sistema a la posición deseada. En otros casos, el ajuste de la ganancia no será suficiente y será necesario variar la dinámica del sistema añadiendo un compensador

En este tema estudiamos el método llamado **lugar de las raíces:**

las raíces del denominador de la función de transferencia (polos) se representan gráficamente para todos los valores de un parámetro del sistema (por ejemplo, la ganancia)

el lugar de las raíces es la representación gráfica de los caminos que describen los polos en el plano *s* al variar ese parámetro

esa representación gráfica nos ayuda a elegir el mejor valor del parámetro. Además, podemos estudiar el efecto de añadir polos y ceros, determinando las consecuencias de añadir compensación. Por tanto, es una herramienta no sólo para seleccionar un valor del parámetro, también para diseñar compensación del sistema.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

la ecuación característica para resolver los polos es:

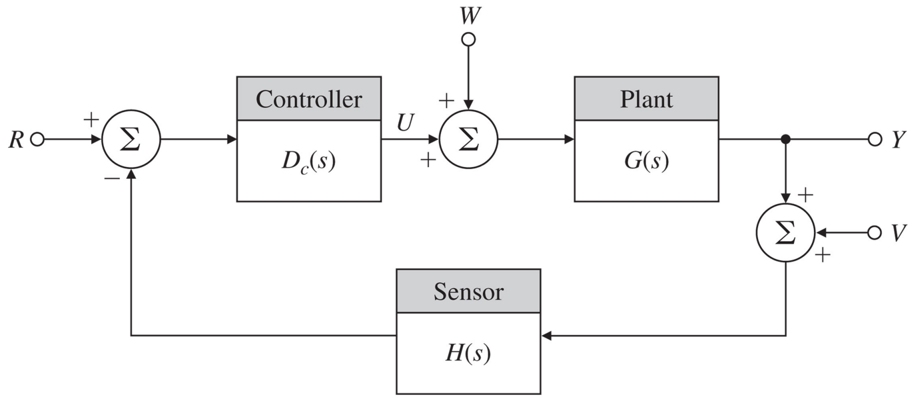
$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

que supone una condición para el módulo y otra para la fase:

$$|G(s)H(s)| = 1 \qquad \text{Eq.(1)}$$

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k+1) \qquad \text{Eq.(2)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D_c(s)G(s)}{1 + D_c(s)G(s)H(s)}$$

la ecuación característica para resolver los polos es:

$$1 + D_c(s)G(s)H(s) = 0$$

Si la fase del número complejo que resulta al sustituir un valor de s en G(s)H(s) es
un múltiplo impar de 180°, ese valor de s es un polo del sistema para algún valor de la ganancia K

En muchos casos, G(s)H(s) involucra un parámetro de ganancia, K, y la ecuación característica se puede escribir como:

$$1 + K\ L(s) = 0 \qquad \text{Eq.(3)}$$

las soluciones de esta ecuación son los polos del sistema de lazo cerrado

Definición (I): el lugar de las raíces es el conjunto de valores de *s* para los cuales se satisface la Eq. (3) al variar el parámetro *K* (real) entre 0 y $+\infty$.

También se puede escribir:

$$L(s) = -\frac{1}{K} \qquad \text{Eq.(4)}$$

Si K es real y positivo, L(s) debe ser real y negativo

lo que nos lleva a definir el lugar de las raíces en función de una condición para la fase:

Definición (II): el lugar de L(s) es el conjunto de puntos en el plano *s* donde la fase de L(s) es 180°

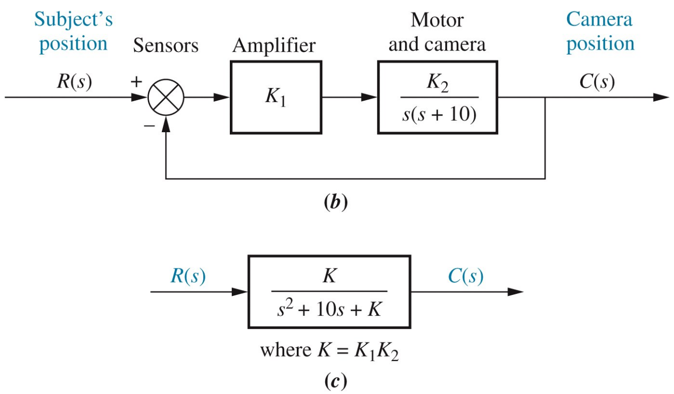


Figure 8.4b

TABLE 8.1 Pole location as function of gain for the system of Figure 8.4

K	Pole 1	Pole 2
0	-10	0
5	-9.47	-0.53
10	-8.87	-1.13
15	-8.16	-1.84
20	-7.24	-2.76
25	-5	-5
30	$-5 + j2.24$	$-5 - j2.24$
35	$-5 + j3.16$	$-5 - j3.16$
40	$-5 + j3.87$	$-5 - j3.87$
45	$-5 + j4.47$	$-5 - j4.47$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

Table 8.1

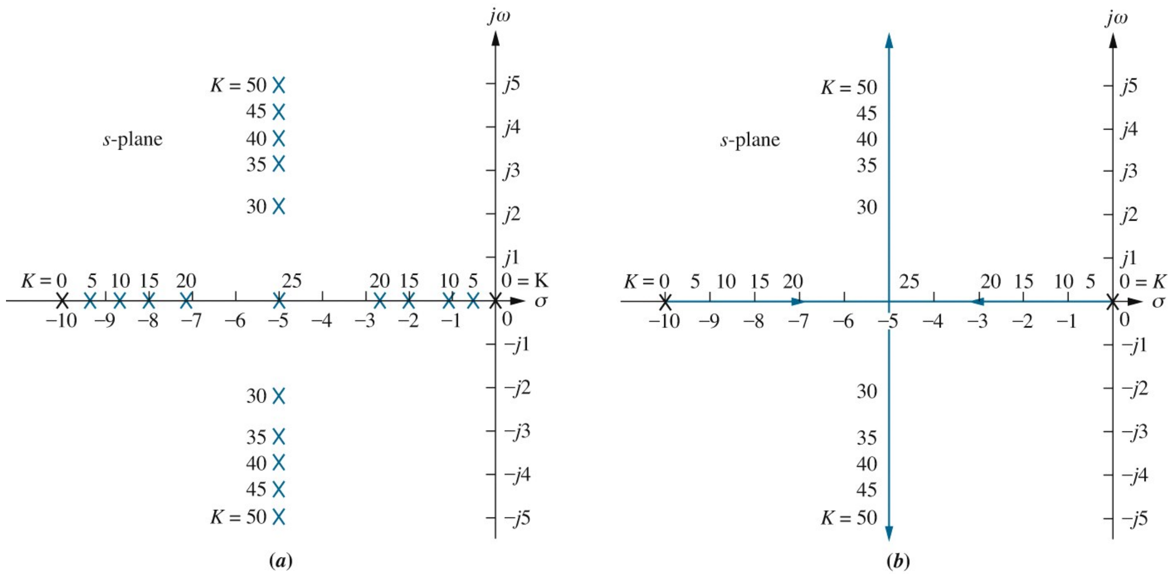


Figure 8.5

¿qué significan las Eq.(1) y Eq.(2)?

tomamos como ejemplo:

función de lazo abierto $$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$ Eq.(5)

función de lazo cerrado $$T(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2+(3+7K)s+(2+12K)}$$ Eq.(6)

Si un valor de *s* es un polo del sistema de lazo cerrado para algún valor de *K*, entonces *s* debe satisfacer las Eq.(1) y Eq.(2)

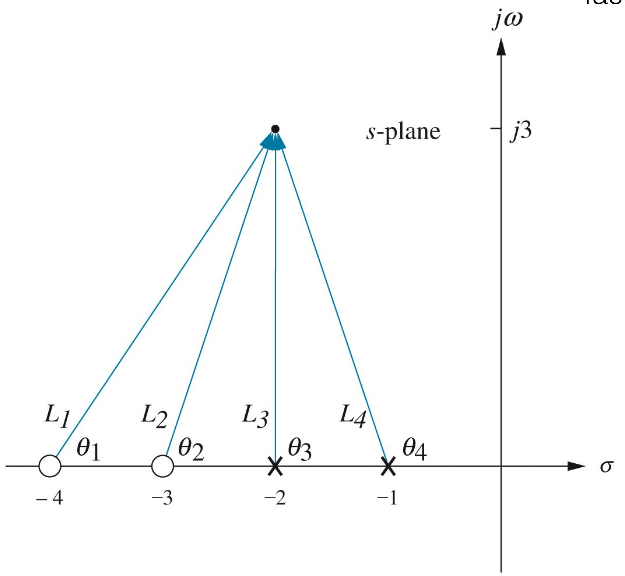


Figure 8.7

Tomamos el punto s=-2+3j. Si es un polo del sistema, según la Eq.(2), la fase de los ceros menos la fase de los polos debe ser un múltiplo impar de 180º:

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 56.31^\circ + 71.57^\circ - 90^\circ - 108.43^\circ = -70.55^\circ$$

Luego, -2+3j no es un punto del lugar de las raíces, es decir,
no es un polo del sistema de lazo cerrado para ningún valor de ganancia

Si hacemos el mismo cálculo para $-2+j(2^{1/2}/2)$, la suma de fases es 180º, es decir,
es un punto del lugar de las raíces

Para bosquejar el lugar de las raíces de un sistema…

Localizamos polos y ceros de G(s)H(s) en el plano *s*. Las ramas del lugar de las raíces comienzan en los polos de G(s)H(s) y terminan en los ceros de G(s)H(s)

Número de ramas: definimos 'rama' como el camino que sigue un polo al variar la ganancia.
El número de ramas de un lugar de las raíces iguala al número de polos del sistema de lazo cerrado

Simetría: el lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real

Segmentos del lugar de las raíces en el eje real: el lugar de las raíces en el eje real está determinado por los polos y los ceros de G(s)H(s) que caen en el eje real.
Los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados de G(s)H(s) no afectan a la localización del lugar de las raíces en el eje real porque su contribución en este eje es 360º.
Cada segmento del lugar de las raíces en el eje real se extiende desde un polo o cero hasta un polo o cero.
Para construir el lugar de las raíces en el eje real tomamos un punto de prueba sobre este eje: si el número total de polos reales y ceros reales a la derecha del punto de prueba es impar, entonces ese punto cae en el lugar de las raíces. La contribución de los polos y ceros de G(s)H(s) a la izquierda de un punto del eje real es cero.
Si los polos y ceros son simples, entonces el lugar de las raíces y su complemento se alternan a lo largo del eje real.
Dicho de otra forma: sobre el eje real, el lugar de las raíces existe a la izquierda de un número impar de polos o ceros de G(s)H(s)

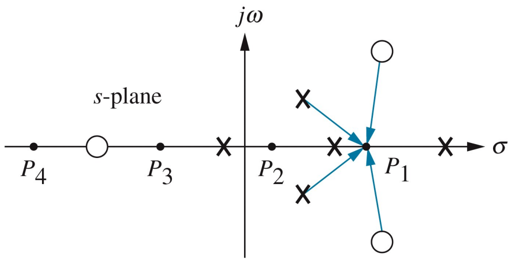


Figure 8.8

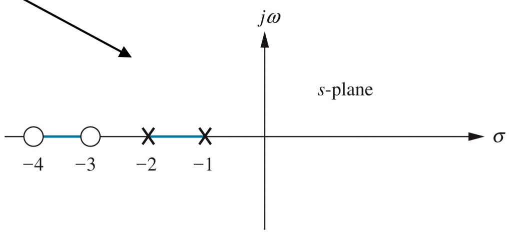


Figure 8.9

lugar de las raíces completo para el sistema de Eq.(5) y Eq.(6): empieza en los polos -1, -2: se mueven en el eje real y se encuentran en algún punto; a partir de ahí salen al plano complejo; vuelven al eje real entre los ceros -3, -4; y se separan.

Puntos inicial (ganancia cero) y final (ganancia infinita):

$$G(s) = \frac{KN_G}{D_G}$$

$$H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

$$T(s) = \frac{KN_G D_H}{D_G D_H + KN_G N_H}$$

el lugar de las raíces empieza en los polos de G(s)H(s) y acaba en los ceros de G(s)H(s)

¿qué conclusión sacas?

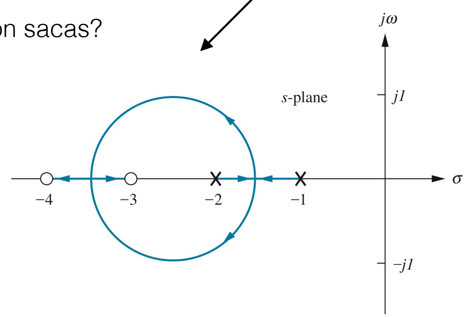


Figure 8.10

Comportamiento en infinito / asíntotas:: el lugar de las raíces se aproxima asintóticamente a rectas con punto de corte en el eje real σ_a y ángulo θ_a:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos finitos} - \sum \text{ceros finitos}}{n - m}$$

$$\theta_a = \frac{180^\circ (2k+1)}{n - m}$$

donde, n es el número de polos finitos de G(s)H(s); y, m, el número de ceros finitos de G(s)H(s)

Punto donde el lugar de las raíces deja el eje real (break away point) y donde vuelve al eje real (break in point)

En estos puntos las ramas del lugar de las raíces forman un ángulo 180º/n con el eje real, donde n es el número de polos de la función de transferencia de lazo cerrado que llegan al eje real o salen de él
Por la simetría del lugar de las raíces, este tipo de puntos pertenecen al eje real o son complejos conjugados

Si el lugar de las raíces cae en el eje real entre dos polos adyacentes de G(s)H(s), entonces existe al menos un punto de ruptura (break away). Igualmente, si el lugar de las raíces cae en el eje real entre dos ceros adyacentes, existirá al menos un punto de retorno al eje (break in)

El punto de ruptura ocurre en un punto de ganancia máxima, en el eje real entre los dos polos de G(s)H(s)

Cuando el par de polos complejos conjugados del sistema de lazo cerrado (lugar de las raíces) vuelve al eje real, la ganancia sigue aumentando hacia infinito a medida que los polos del sistema de lazo cerrado se mueven hacia los ceros del sistema de lazo abierto, luego la ganancia en el punto de retorno es la mínima ganancia en el eje real entre los dos ceros

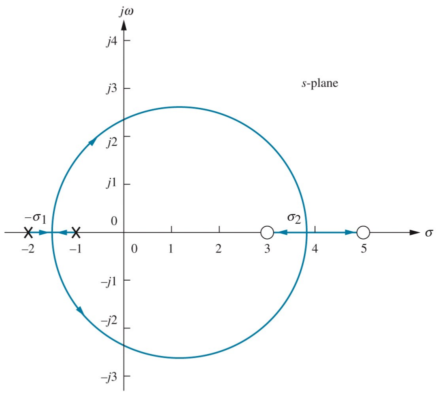
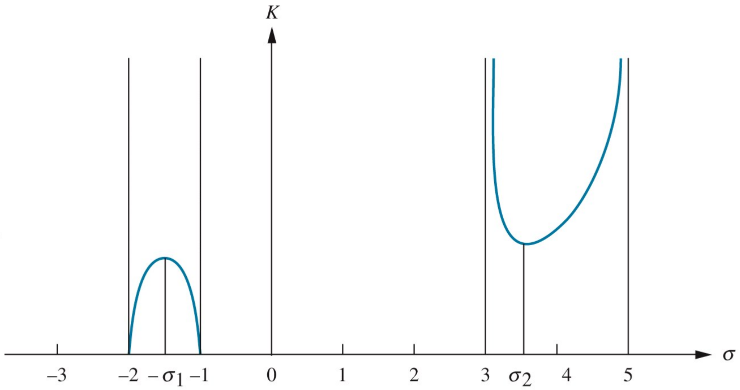


Figure 8.13



$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

$\downarrow$

derivamos K en el eje real para encontrar esos puntos

Punto donde el lugar de las raíces cruza el eje imaginario (jω)

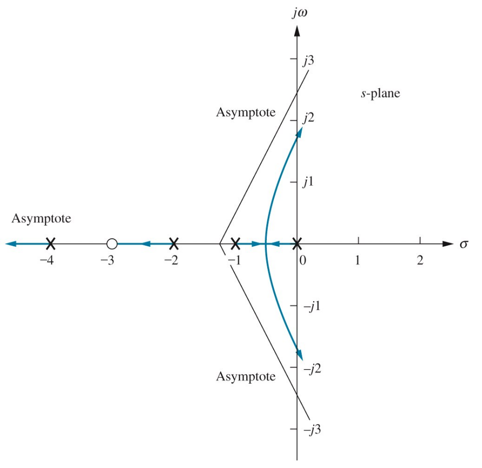


Figure 8.12

en este ejemplo, los polos del sistema están en el semiplano izquierdo hasta un determinado valor de ganancia
El punto de corte con el eje jω separa la operación estable del sistema de la operación inestable; y el valor de ω en el punto de corte da la frecuencia de oscilación
Para encontrar el punto de corte en el eje jω puedes utilizar el criterio de Routh-Hurwitz: forzando una fila de ceros encuentras la ganancia; si vas una fila atrás al polinomio par correspondiente puedes resolver la frecuencia de oscilación

Ángulo de salida (de llegada) del lugar de las raíces desde un polo complejo (a un cero complejo)

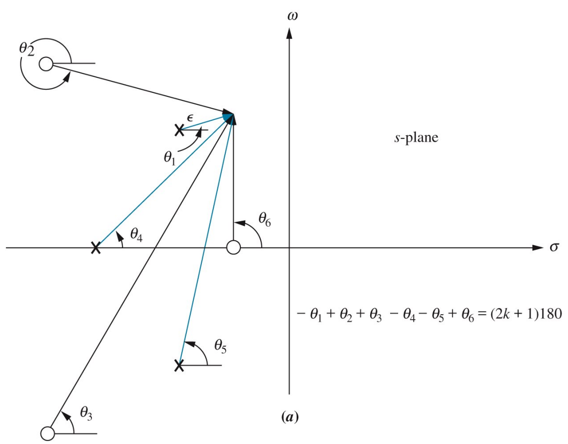


Figure 8.15a

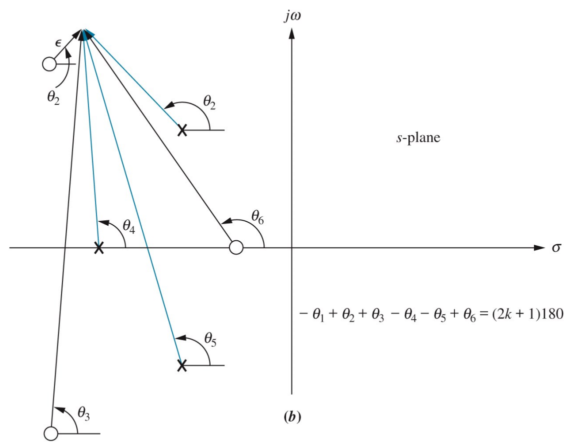


Figure 8.15b

Determina analíticamente los puntos esenciales para dibujar este lugar de las raíces

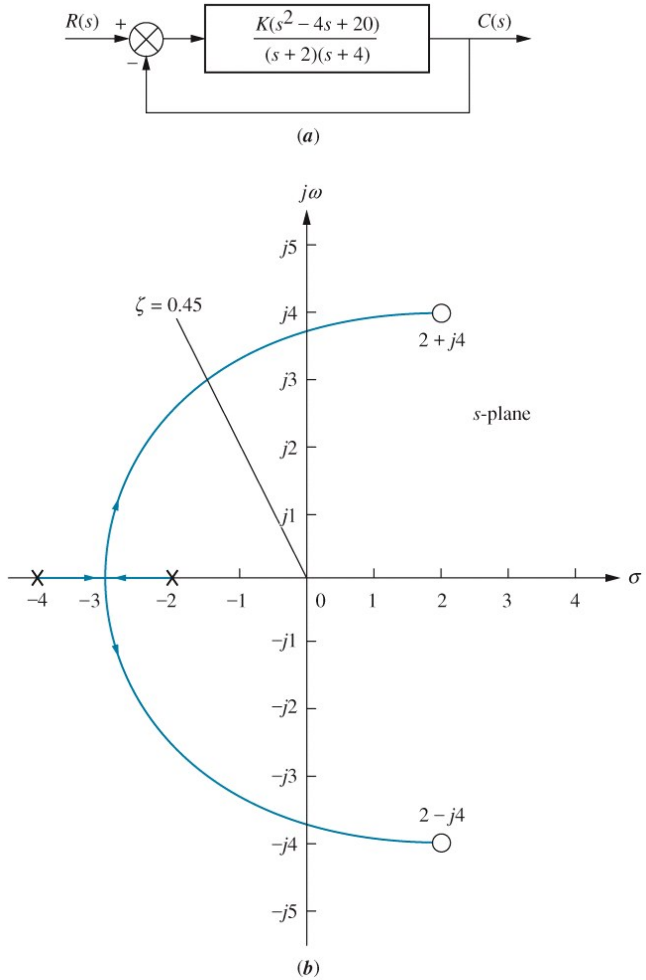
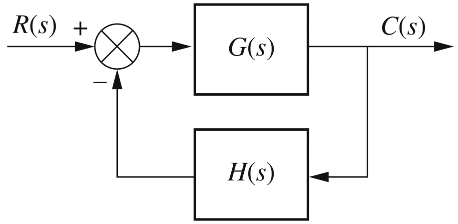
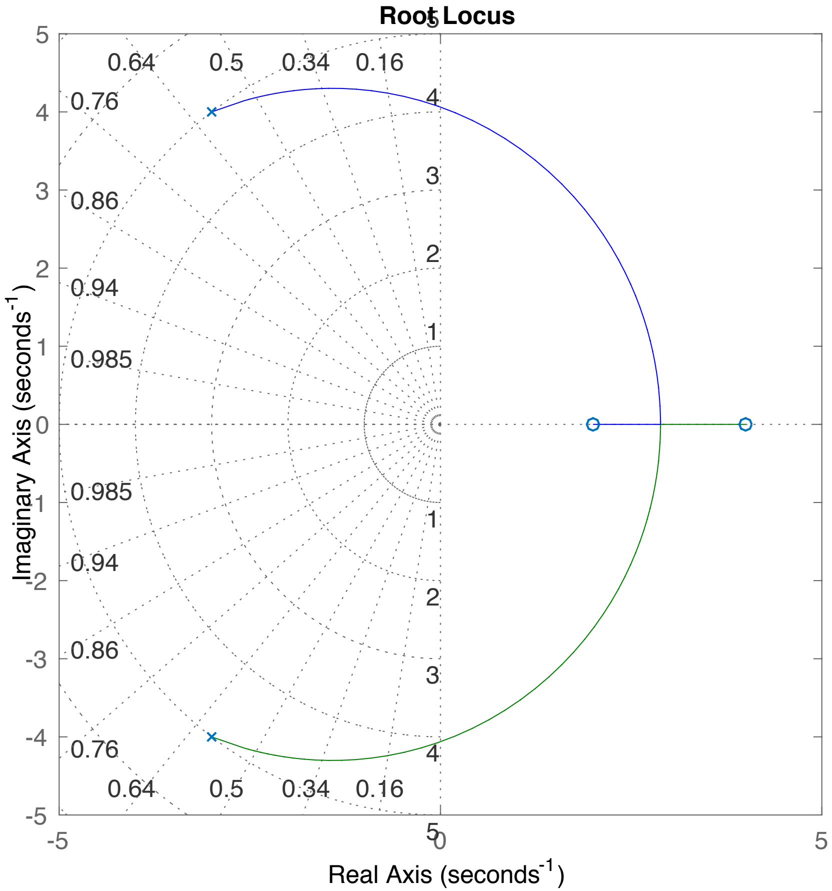


Figure 8.19

Determina analíticamente los puntos esenciales para dibujar este lugar de las raíces



$$G(s) = \frac{K(s-2)(s-4)}{s^2+6s+25} \qquad H(s) = 1$$



Una vez que hemos dibujado el lugar de las raíces podemos localizar puntos de forma precisa y encontrar la ganancia en ellos:

Las líneas de coeficiente de amortiguamiento constante (ζ=constante) son radios: $\zeta=\cos \Phi$
Las líneas de frecuencia natural ω_n constante son círculos