Matemáticas Empresariales

Universidad Europea de Madrid

Contenidos

Contenidos

Función de varias variables

Podemos generalizar el concepto de función de una variable para varias. Así una función de varias variables es una regla para obtener un nuevo número (real) a partir de los valores de varias variables $x, y, z, t, \ldots$.

$$f(x, y, z, \ldots)$$

Ejemplos

1. Supongamos que somos dueños de una empresa que fabrica dos modelos de bocinas:la mini y la super. Su coste mensual total en euros por fabricar x de las minis e y de las super viene dado por

$$C(x, y) = 10000 + 20x + 40y$$

¿Qué quiere decir cada término en esta fórmula?.

$\star$ El *término constante* representa el coste total de no fabricar nada ($x = 0, y = 0$). Por lo tanto es el *coste fijo*, la cantidad que hay que pagar al mes por no fabricar bocinas.

Ejemplos

1. Supongamos que somos dueños de una empresa que fabrica dos modelos de bocinas:la mini y la super. Su coste mensual total en euros por fabricar x de las minis e y de las super viene dado por

$$C(x,y) = 10000 + 20x + 40y$$

¿Qué quiere decir cada término en esta fórmula?.
$\star$ El *término constante* representa el coste total de no fabricar nada $(x = 0, y = 0)$. Por lo tanto es el *coste fijo*, la cantidad que hay que pagar al mes por no fabricar bocinas.

Ejemplo

$\star$ Los *coeficientes de la* x *y la* y:
Supongamos que en un mes se fabrica cierta cantidad de bocinas mini y super, y el mes siguiente se aumenta la producción de las mini en una.

Ejemplo

Los costes son: $C(x, y) = 10000 + 20(x + 1) + 40y = 10000 + 20x + 20 + 40y = C(x, y) + 20$ Así cada mini aumenta 20 euros al coste total. Se dice que 20 es el coste marginal de cada mini. De las misma forma, una super aumenta 40 euros al coste total. El coste marginal de la super es de 40 euros.

Observación Ésta es una función *lineal* de dos variables. Los coeficientes representan papeles parecidos a los de la pendiente de una recta. En particular, expresa la razón de cambio de la función cuando cada variable aumenta y las demás permanecen constantes.

Ejemplo

Los costes son: $C(x,y) = 10000 + 20(x+1) + 40y = 10000 + 20x + 20 + 40y = C(x,y) + 20$ Así cada mini aumenta 20 euros al coste total. Se dice que 20 es el coste marginal de cada mini. De las misma forma, una super aumenta 40 euros al coste total. El coste marginal de la super es de 40 euros.

Observación Ésta es una función *lineal* de dos variables. Los coeficientes representan papeles parecidos a los de la pendiente de una recta. En particular, expresa la razón de cambio de la función cuando cada variable aumenta y las demás permanecen constantes.

Dominio e Imagen

Dominio

Llamamos *dominio* de una función f, que anotaremos por $Dom(f)$, al conjunto de partida A.

Si no se especifica el conjunto de salida, el dominio de f será el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ más grande donde la función tiene sentido.

Dominio e Imagen

Dominio

Llamamos *dominio* de una función f, que anotaremos por $Dom(f)$, al conjunto de partida A.

Si no se especifica el conjunto de salida, el dominio de f será el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ más grande donde la función tiene sentido.

Dominio e Imagen

Imagen

Llamamos *imagen* de una función f, que denotaremos por $Im(f)$, al conjunto de todos los números reales que son imagen de algún par ordenado del domino de la función.

En símbolos:

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in A \wedge z = f(x, y)\}$$

Dominio e Imagen

Imagen

Llamamos *imagen* de una función f, que denotaremos por $Im(f)$, al conjunto de todos los números reales que son imagen de algún par ordenado del domino de la función.

En símbolos:

$$Im(f) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x, y) \in A \wedge z = f(x, y)\}$$

Contenidos

Un plano horizontal tiene por ecuación $z = c$ con c constante. La intersección de la gráfica de f con el plano horizontal son por tanto los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y) = c$.
Para entender como es la gráfica de f, sin embargo, lo que nos interesa es dibujar este conjunto sobre el plano (x, y). Es decir, el conjunto formado por todos los puntos (x, y) del plano en los que f toma el valor c.

Definición

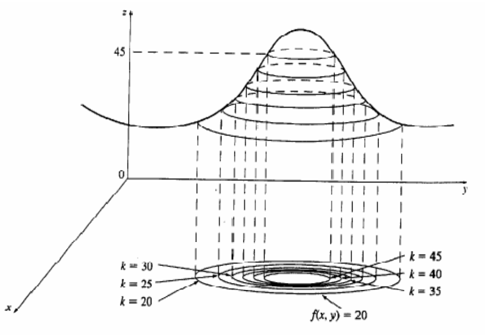
La curva de nivel c de la función $z = f(x, y)$ es el conjunto de puntos (x, y) del plano que cumplen $f(x, y) = c$

Un plano horizontal tiene por ecuación $z = c$ con c constante. La intersección de la gráfica de f con el plano horizontal son por tanto los puntos (x, y, z) tales que $z = f(x, y) = c$.
Para entender como es la gráfica de f, sin embargo, lo que nos interesa es dibujar este conjunto sobre el plano (x, y). Es decir, el conjunto formado por todos los puntos (x, y) del plano en los que f toma el valor c.

Definición

La curva de nivel c de la función $z = f(x, y)$ es el conjunto de puntos (x, y) del plano que cumplen $f(x, y) = c$

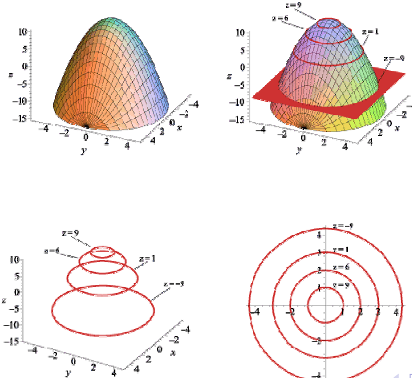
Gráficamente



Ejemplo 1

La función $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ determina una superficie que se llama paraboloide.

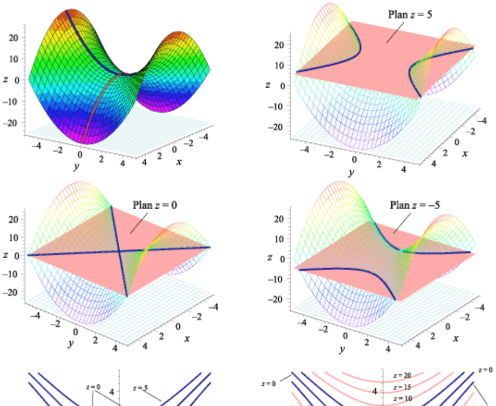
Ejemplo 1



Ejemplo 2

La función $f(x, y) = y^2 - x^2$ determina una superficie que se llama paraboloide hiperbólico o silla de montar.

Ejemplo 2



Observación

Una curva de nivel es entonces el conjunto de puntos en los que f vale c.
Veremos después algunas propiedades de las curvas (en general conjuntos) de nivel que los hacen interesantes en sí mismos y que tienen una interpretación económica concreta, según la función que estemos estudiando.
Además, las curvas de nivel pueden servir para ayudarnos a visualizar la gráfica de una función $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ya que, como hemos dicho, el c-conjunto de nivel es la proyección en el plano xy de la intersección de la gráfica de f con el plano horizontal $z = c$.

Contenidos

Gráfica de una función de varias variables

Al igual que en las funciones reales de una variable podemos dibujar la función en el plano, es posible realizar la gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$, considerando todos los puntos $(x, y, f(x, y))$, en tres ejes perpendiculares. Así la gráfica es el conjunto de los puntos (x, y, z) tales que $f(x, y) = z$ y representa una *superficie*.
En general, no es fácil dibujar la gráfica de una función de dos variables, por lo que nos podemos ayudar de las *curvas de nivel*, que son aquellos puntos (x, y) donde la función es constante $f(x, y) = c$.

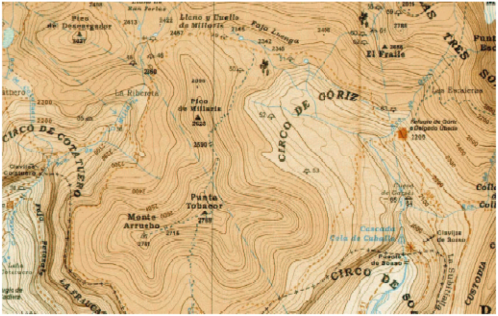
Gráfica de una función de varias variables

En Economía, las curvas de nivel aparecen en muchas aplicaciones diferentes. Por ejemplo, si tenemos una función que representa la producción en función del trabajo y el capital, las curvas de nivel se denominan *isocuantas* y las forman aquellos valores para los que la producción es constante.

Observación

Podemos pensar a la gráfica de una función $z = f(x, y)$ como un paisaje con un cierto relieve. En cartografía se utilizan las curvas de nivel para incorporar a un mapa (plano) alguna información tridimensional del relieve que corresponde a la zona representada. En esta figura se muestra una parte de un mapa cartográfico del Parque Nacional de Ordesa, en los Pirineos en el que se aprecian con claridad esas curvas de nivel.

Observación



Observación

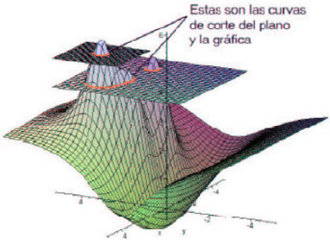
En la esquina superior izquierda de este mapa aparece el Pico Descargador, una curiosa formación geológica en la que la naturaleza parece haber querido representar de modo explícito la idea de curvas de nivel. He aquí una foto de ese pico:

Observación

Observación

Las curvas de nivel se obtienen cortando la gráfica con planos horizontales situados a distintas alturas. En la siguiente figura se muestra una gráfica cortada con dos planos horizontales a distintas alturas.

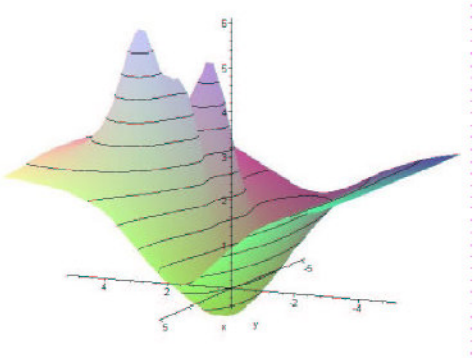
Observación



Observación

Si cortamos la gráfica con varios de estos planos horizontales obtenemos una serie de curvas situadas sobre la gráfica:

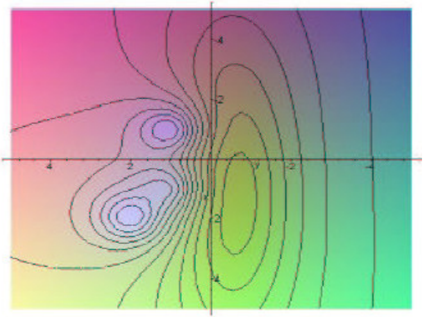
Observación



Observación

Si ahora proyectamos esas curvas sobre el plano xy (lo cual equivale a mirar la gráfica, el paisaje, desde arriba, a vista de pájaro), vemos una familia de curvas planas, que son las curvas de nivel de esta gráfica:

Observación



Observación

Recordemos que dijimos que una función de una variable podíamos escribirla, en forma implícita, como $F(x, y) = y - f(x) = 0$. Observar entonces que la gráfica de nuestra función de una variable es una curva de nivel de $F(x, y)$, concretamente la curva de nivel $F(x, y) = 0$.

Contenidos

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Al igual que para las funciones reales de variable real la derivada de la función representa la razón de cambio de f, nos podemos preguntar cómo varia la función al aumentar una de las variables cuando las demás permanecen constantes. A estas razones de cambio se las denomina *derivadas parciales de* f y las denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial z};\ldots$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

2. $f(x, y) = x^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

2. $f(x, y) = x^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

2. $f(x,y) = x^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

Ejemplos:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

2. $f(x,y) = x^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

1. $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

2. $f(x,y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 2y + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x - 1$$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

1. $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

2. $f(x,y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 2y + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x - 1$$

Cálculo diferencial para funciones reales de varias variables

1. $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

2. $f(x,y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 2y + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x - 1$$

Ejemplo

Coste marginal: Retomemos el ejemplo de la fábrica de bocinas, ¿Qué representa ahora $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$?.

Si calculamos las derivadas parciales de la función de coste $C(x, y) = 10000 + 20x + 40y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 40$$

Por lo que la derivada parcial de la función respecto de cada variable nos da el coste marginal, o lo que es lo mismo, la razón de cambio del coste cuando aumenta la fabricación de cada tipo de bocina.

Ejemplo

Coste marginal: Retomemos el ejemplo de la fábrica de bocinas, ¿Qué representa ahora $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$?.
Si calculamos las derivadas parciales de la función de coste $C(x, y) = 10000 + 20x + 40y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 40$$

Por lo que la derivada parcial de la función respecto de cada variable nos da el coste marginal, o lo que es lo mismo, la razón de cambio del coste cuando aumenta la fabricación de cada tipo de bocina.

Contenidos

Plano tangente

Recordemos que la derivada de una función en un punto se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Generalizando esta interpretación podemos construir el plano tangente a una superficie en un punto (x_0, y_0) a través de las derivadas parciales de la función.

Plano tangente

De esta forma el *plano tangente* a una superficie $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) viene dado por

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y - y_0)$$

Ejemplo

Calcular el plano tangente a la superficie dada por la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1,1)$.

Consideramos $z = x^2 + y^2$. Ahora como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, tenemos que el plano pedido es

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}(y-1)$$

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

Ejemplo

Calcular el plano tangente a la superficie dada por la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1,1)$.
Consideramos $z = x^2 + y^2$. Ahora como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, tenemos que el plano pedido es

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}(y-1)$$

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

Cálculo diferencial para funciones reales

NOTACIÓN: En ocasiones escribimos las derivadas parciales como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y)$$

Contenidos

Derivadas parciales orden superior

Una vez obtenidas las derivadas parciales de una función de varias variables, si estas son derivables, podemos seguir derivándolas obteniendo las derivadas parciales de segundo orden. Así podemos calcular

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Y las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Contenidos

Puntos extremos

En el estudio de una función real de variable real vimos que una de las aplicaciones más importantes de las derivadas era hallar valores máximo y mínimos. En esta sección vamos a ver como utilizar las derivadas parciales para calcular dicho valores en una función de dos variables.

Definición

Una función de dos variables tiene un *máximo local o relativo* en el punto (a, b), si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b). Analogamente, una función de dos variables tiene un *mínimo local o relativo* en el punto (a, b), si $f(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b).

Puntos extremos

Los *candidatos* a extremos son los llamados **puntos críticos**, que son aquellos puntos en los que se anulan las derivadas parciales $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$. Si (a, b) es un máximo (o un mínimo) y la función es diferenciable en dicho punto entonces, (a, b) es un punto crítico. Sin embargo, no todos los puntos críticos son máximos o mínimos.
Por lo tanto, para calcular los máximos y mínimos de una función de dos variables, hay que:

- Calcular los puntos críticos
- Estudiar si son máximos, mínimos, o nada.

Criterio

Para determinar si un punto crítico es un valor extremos podemos usar el siguiente criterio basado en las segundas derivadas:
Si las segundas derivadas parciales de la función $f(x, y)$ son continuas en un entorno del punto (a, b) y $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ (es un punto crítico), entonces sea

$$D = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

1. Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces (a, b) es un mínimo local.
2. Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces (a, b) es un máximo local.
3. Si $D < 0$, entonces (a, b) es un **punto de silla**.
4. Si $D = 0$ el criterio no es concluyente.

Contenidos

Matriz Hessiana

Las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x,y)$ pueden escribirse en una matriz, que recibe el nombre de matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Observemos que D es el determinante de dicha matriz.

Ejemplo

EJEMPLOS:

1. *Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$$

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x(x,y) = 4x - 4x^3 \qquad f_y(x,y) = 4y - 4y^3$$

Por lo tanto para calcular los puntos críticos es necesario resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 4x^3 = 0 \\ 4y - 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x(1-x^2) = 0 \\ 4y(1-y^2) = 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplo

EJEMPLOS:

1. *Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4 + 3$$

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x(x,y) = 4x - 4x^3 \qquad f_y(x,y) = 4y - 4y^3$$

Por lo tanto para calcular los puntos críticos es necesario resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 4x^3 = 0 \\ 4y - 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x(1-x^2) = 0 \\ 4y(1-y^2) = 0 \end{array}\Bigg\}$$

Ejemplos

Las soluciones son $x = 0, 1, -1$ e $y = 0, 1, -1$, obtenemos 9 puntos críticos: $(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0),$
$(-1,0), (1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)$.
Necesitamos el criterio de las derivadas de segundo orden para clasificarlos, para ello calculamos:

$$f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2 \qquad f_{yy} = 4 - 12y^2 \qquad f_{xy}(x,y) = 0$$

Y el determinante de la matriz Hessiana
$D(x,y) = (4 - 12x^2)(4 - 12y^2) - 0^2$.

Ejemplos

Las soluciones son $x = 0, 1, -1$ e $y = 0, 1, -1$, obtenemos 9 puntos críticos: $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0)$, $(-1, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)$.
Necesitamos el criterio de las derivadas de segundo orden para clasificarlos, para ello calculamos:

$$f_{xx}(x, y) = 4 - 12x^2 \qquad f_{yy} = 4 - 12y^2 \qquad f_{xy}(x, y) = 0$$

Y el determinante de la matriz Hessiana
$D(x, y) = (4 - 12x^2)(4 - 12y^2) - 0^2$.

Ejemplos

⋆ Para el punto $(0,0)$:

$$f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 4 \qquad f_{xy}(0,0) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un mínimo local en $(0,0,f(0,0) = 3)$.

⋆ Para el punto $(0,1)$:

$$f_{xx}(0,1) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,1) = -8 \qquad f_{xy}(x,y) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(0,1,f(0,1) = 4)$.

Ejemplos

$\star$ Para el punto $(0,0)$:

$$f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 4 \qquad f_{xy}(0,0) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un mínimo local en $(0,0,f(0,0) = 3)$.
$\star$ Para el punto $(0,1)$:

$$f_{xx}(0,1) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,1) = -8 \qquad f_{xy}(x,y) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(0,1,f(0,1) = 4)$.

Ejemplos

⋆ Para el punto $(0,0)$:

$$f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 4 \qquad f_{xy}(0,0) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un mínimo local en $(0,0,f(0,0) = 3)$.

⋆ Para el punto $(0,1)$:

$$f_{xx}(0,1) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,1) = -8 \qquad f_{xy}(x,y) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(0,1,f(0,1) = 4)$.

Ejemplos

⋆ Para el punto $(1, 0)$:

$$f_{xx}(1,0) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,0) = 4 \qquad f_{xy}(1,0) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(1, 0, f(1,0) = 4)$.

⋆ Para el punto $(0, -1)$:

$$f_{xx}(0,-1) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,-1) = -8 \qquad f_{xy}(0,-1) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(0, -1, f(0,-1) = 4)$.

Ejemplos

$\star$ Para el punto $(1,0)$:

$$f_{xx}(1,0) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,0) = 4 \qquad f_{xy}(1,0) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(1, 0, f(1,0) = 4)$.

$\star$ Para el punto $(0,-1)$:

$$f_{xx}(0,-1) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,-1) = -8 \qquad f_{xy}(0,-1) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(0, -1, f(0,-1) = 4)$.

Ejemplos

$\star$ Para el punto $(1, 0)$:

$$f_{xx}(1,0) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,0) = 4 \qquad f_{xy}(1,0) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(1, 0, f(1, 0) = 4)$.

$\star$ Para el punto $(0, -1)$:

$$f_{xx}(0,-1) = 4 > 0 \qquad f_{yy}(0,-1) = -8 \qquad f_{xy}(0,-1) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(0, -1, f(0, -1) = 4)$.

Ejemplos

$\star$ Para el punto $(1, 1)$:

$$f_{xx}(1,1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,1) = -8 \qquad f_{xy}(1,1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1, 1, 5)$.

$\star$ Para el punto $(1, -1)$:

$$f_{xx}(1,-1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,-1) = -8 \qquad f_{xy}(1,-1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1, -1, 5)$.

Ejemplos

$\star$ Para el punto $(1,1)$:

$$f_{xx}(1,1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,1) = -8 \qquad f_{xy}(1,1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1,1,5)$.
$\star$ Para el punto $(1,-1)$:

$$f_{xx}(1,-1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,-1) = -8 \qquad f_{xy}(1,-1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1,-1,5)$.

Ejemplos

$\star$ Para el punto $(1,1)$:

$$f_{xx}(1,1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,1) = -8 \qquad f_{xy}(1,1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1,1,5)$.

$\star$ Para el punto $(1,-1)$:

$$f_{xx}(1,-1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(1,-1) = -8 \qquad f_{xy}(1,-1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(1,-1,5)$.

Ejemplo

⋆ Para el punto $(-1,0)$:

$$f_{xx}(-1,0) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,0) = -8 \qquad f_{xy}(-1,0) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(-1,0,4)$.

⋆ Para el punto $(-1,1)$:

$$f_{xx}(-1,1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,1) = -8 \qquad f_{xy}(-1,1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1,1,5)$.

Ejemplo

⋆ Para el punto $(-1, 0)$:

$$f_{xx}(-1,0) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,0) = -8 \qquad f_{xy}(-1,0) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(-1, 0, 4)$.

⋆ Para el punto $(-1, 1)$:

$$f_{xx}(-1,1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,1) = -8 \qquad f_{xy}(-1,1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1, 1, 5)$.

Ejemplo

⋆ Para el punto $(-1, 0)$:

$$f_{xx}(-1,0) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,0) = -8 \qquad f_{xy}(-1,0) = 0 \qquad D < 0$$

Por lo tanto hay un punto de silla en $(-1, 0, 4)$.

⋆ Para el punto $(-1, 1)$:

$$f_{xx}(-1,1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,1) = -8 \qquad f_{xy}(-1,1) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1, 1, 5)$.

Ejemplo

⋆ Para el punto $(-1,-1)$:

$f_{xx}(-1,-1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,-1) = -8 \qquad f_{xy}(-1,-1) = 0 \qquad D$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1,-1,5)$.

Ejemplo

$\star$ Para el punto $(-1,-1)$:

$$f_{xx}(-1,-1) = -8 < 0 \qquad f_{yy}(-1,-1) = -8 \qquad f_{xy}(-1,-1) = 0 \qquad D$$

Por lo tanto hay un máximo local en $(-1,-1,5)$.

Aplicación Económica

2. *Una empresa fabrica chocolate según la función de producción*

$$Q(x, y) = -x^3 - 3y^2 + 3x^2 + 24y$$

donde x es la cantidad de cacao e y la de leche empleadas en la fabricación

1. *Calcúlense las productividades marginales en el punto* $(1, 2)$
2. *Hállese la productividad máxima*

Ejemplo 2

a) Calcúlense las productividades marginales en el punto $(1, 2)$. Las productividades marginales en un punto son las derivadas parciales de primer orden en ese punto

$$Q_x(x, y) = -3x^2 + 6x \qquad Q_y(x, y) = -6y + 24$$

$$Q_x(1, 2) = 3 \qquad Q_y(1, 2) = 12$$

Ejemplo

b) Hállese la productividad máxima.

En primer lugar calculamos los puntos críticos igualando las primeras derivadas a cero:

$$Q_x(x,y) = -3x^2 + 6x = 0 \qquad Q_y(x,y) = -6y + 24 = 0$$

Y obtenemos los puntos $(0,4)$ y $(2,4)$, sin embargo el primer punto no tiene sentido económico pues implica no utilizar cacao en la producción ($x = 0$), así que el punto *candidato* a máximo es el $(2,4)$.

Ejemplo

b) Hállese la productividad máxima.
En primer lugar calculamos los puntos críticos igualando las primeras derivadas a cero:

$$Q_x(x,y) = -3x^2 + 6x = 0 \qquad Q_y(x,y) = -6y + 24 = 0$$

Y obtenemos los puntos $(0,4)$ y $(2,4)$, sin embargo el primer punto no tiene sentido económico pues implica no utilizar cacao en la producción ($x = 0$), así que el punto *candidato* a máximo es el $(2,4)$.

Ejemplo 2

Clasificación del punto extremo:

$$Q_{xx}(x,y) = -6x + 6 \qquad Q_{yy}(x,y) = -6 \qquad Q_{xy}(x,y) = 0$$

Y la matriz Hessiana queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} -6x + 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

con determinante $D = 36x - 36$.
En el punto $(2,4)$

$$Q_{xx}(2,4) = -6 < 0 \qquad Q_{yy}(2,4) = -6 \qquad Q_{xy}(2,4) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo que $(2,4)$ es un máximo relativo de la función. Y la producción máxima es $Q(2,4) = 54$.

Ejemplo 2

Clasificación del punto extremo:

$$Q_{xx}(x,y) = -6x + 6 \qquad Q_{yy}(x,y) = -6 \qquad Q_{xy}(x,y) = 0$$

Y la matriz Hessiana queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} -6x+6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

con determinante $D = 36x - 36$.

En el punto $(2,4)$

$$Q_{xx}(2,4) = -6 < 0 \qquad Q_{yy}(2,4) = -6 \qquad Q_{xy}(2,4) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo que $(2,4)$ es un máximo relativo de la función. Y la producción máxima es $Q(2,4) = 54$.

Ejemplo 2

Clasificación del punto extremo:

$$Q_{xx}(x,y) = -6x + 6 \qquad Q_{yy}(x,y) = -6 \qquad Q_{xy}(x,y) = 0$$

Y la matriz Hessiana queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} -6x+6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

con determinante $D = 36x - 36$.
En el punto $(2,4)$

$$Q_{xx}(2,4) = -6 < 0 \qquad Q_{yy}(2,4) = -6 \qquad Q_{xy}(2,4) = 0 \qquad D > 0$$

Por lo que $(2,4)$ es un máximo relativo de la función. Y la producción máxima es $Q(2,4) = 54$.