

las curvas de módulo y fase de respuesta en frecuencia (log-magnitude, phase) en función de $\log \omega$ se denominan **diagramas de Bode**
podemos dibujar un diagrama de Bode como una aproximación de líneas rectas:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_k)}{s^m(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_m)}$$

ceros: $z_1, z_2, \dots$
polos: $p_1, p_2, \dots$

$$|G(j\omega)| = \frac{K |(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_k)|}{|s^m| |(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_m)|} \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K + 20 \log |(s + z_1)| + 20 \log |(s + z_2)| + \dots \\ - 20 \log |(s^m)| - 20 \log |(s + p_1)| - 20 \log |(s + p_2)| \dots \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$



en el diagrama Bode del módulo los términos de los 'ceros' suman; los términos de los polos, restan:
representamos aproximadamente diagramas de Bode sumando (ceros) o restando (polos) la respuesta de cada término

el diagrama de Bode de la fase se construye de la misma manera: fase de los 'ceros', suma; fase de los 'polos', resta

Podemos construir el diagrama de Bode de funciones más complicadas a partir de los términos:

$$(s + a), \frac{1}{s + a}, s, \frac{1}{s} \quad \text{cero / polo real (-a); cero / polo en el origen}$$

$$\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{polos complejos conjugados}$$

$$G(s) = (s + a) = (j\omega + a) = a \left(j\frac{\omega}{a} + 1 \right)$$

módulo: $|G(\omega)| = \sqrt{a^2 + \omega^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$

fase: $\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$$\omega \ll a$$

$$|G(\omega)| \approx a \quad 20 \log |G(\omega)| \approx 20 \log a$$

$$\phi(\omega) \rightarrow 0$$

$$\omega \gg a$$

$$20 \log |G(\omega)| \approx 20 \log \omega$$

$$\phi \rightarrow 90^\circ$$

$$\omega = a \quad \text{ambas aproximaciones coinciden y } \phi = 45^\circ$$

en representación de '20 log G' vs 'log w' esto es
recta de pendiente 20 (aumenta 6 dB al doblar la frecuencia:
6dB/octava=20dB/decada)

los diagramas de Bode según las aproximaciones anteriores:

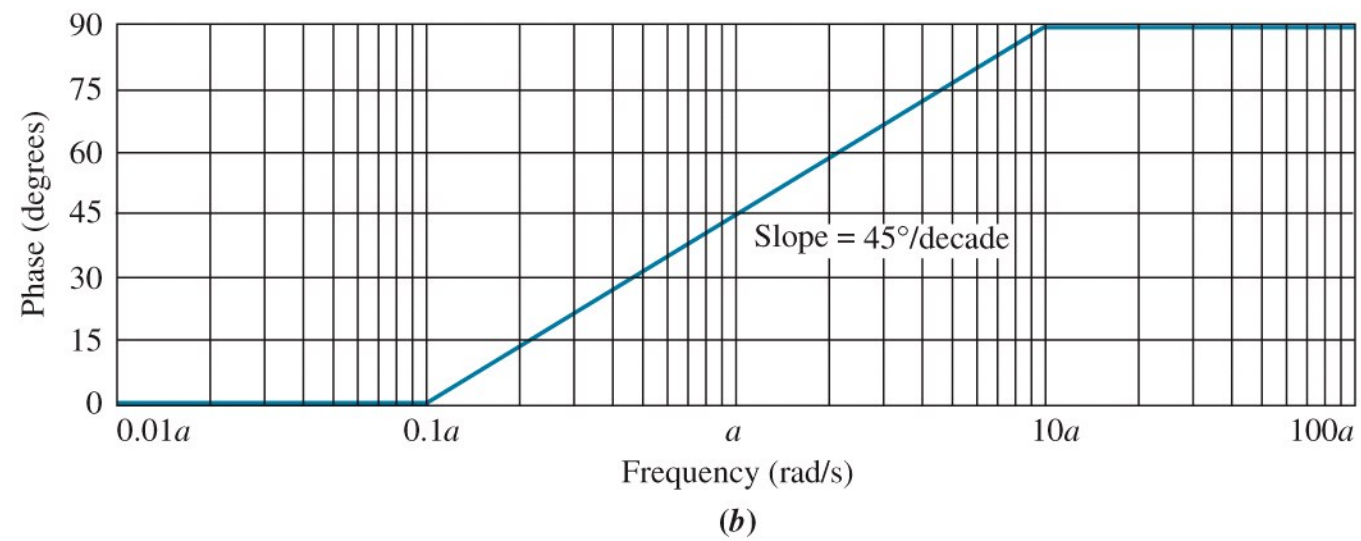
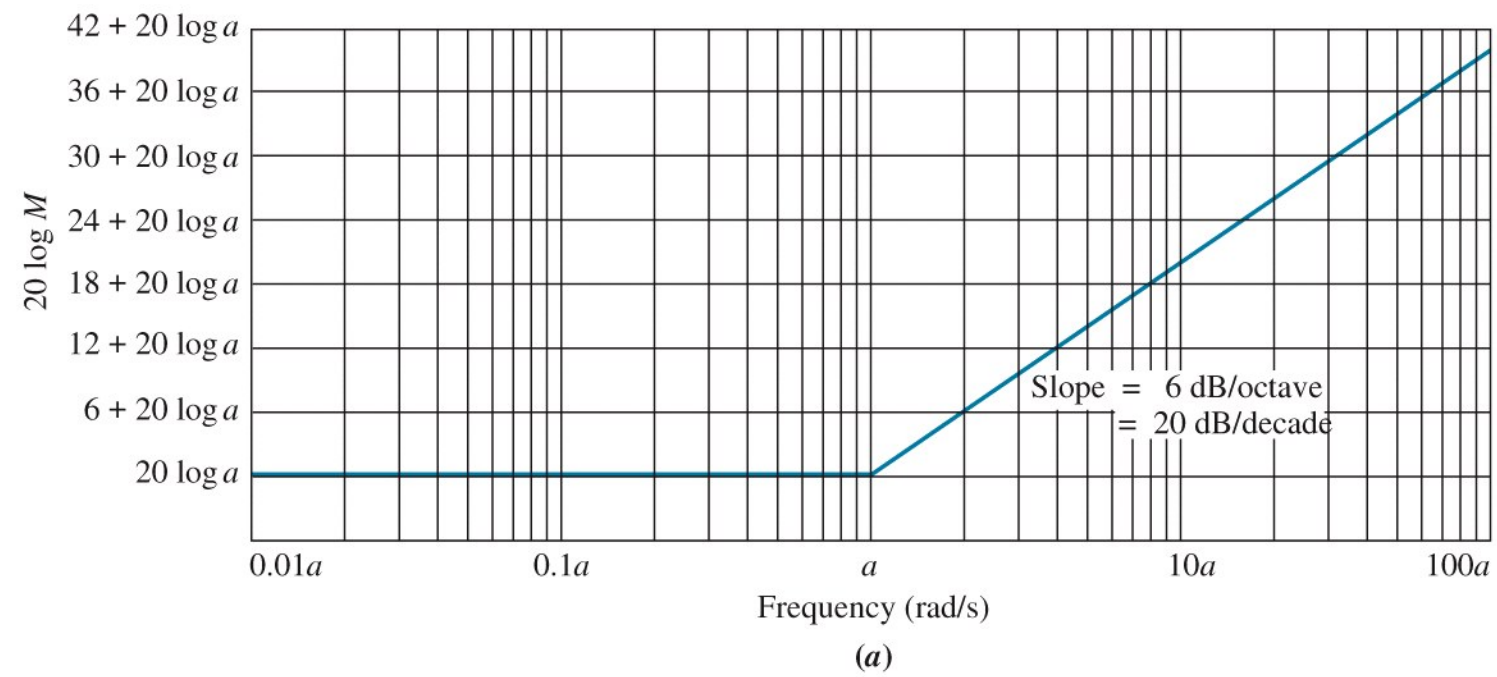


Figure 10.6
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

si normalizamos el diagrama de Bode del módulo y escalamos el diagrama de fase:

$$G(s) = (s + a) = a \left(\frac{s}{a} + 1 \right) \rightarrow (s_1 + 1)$$

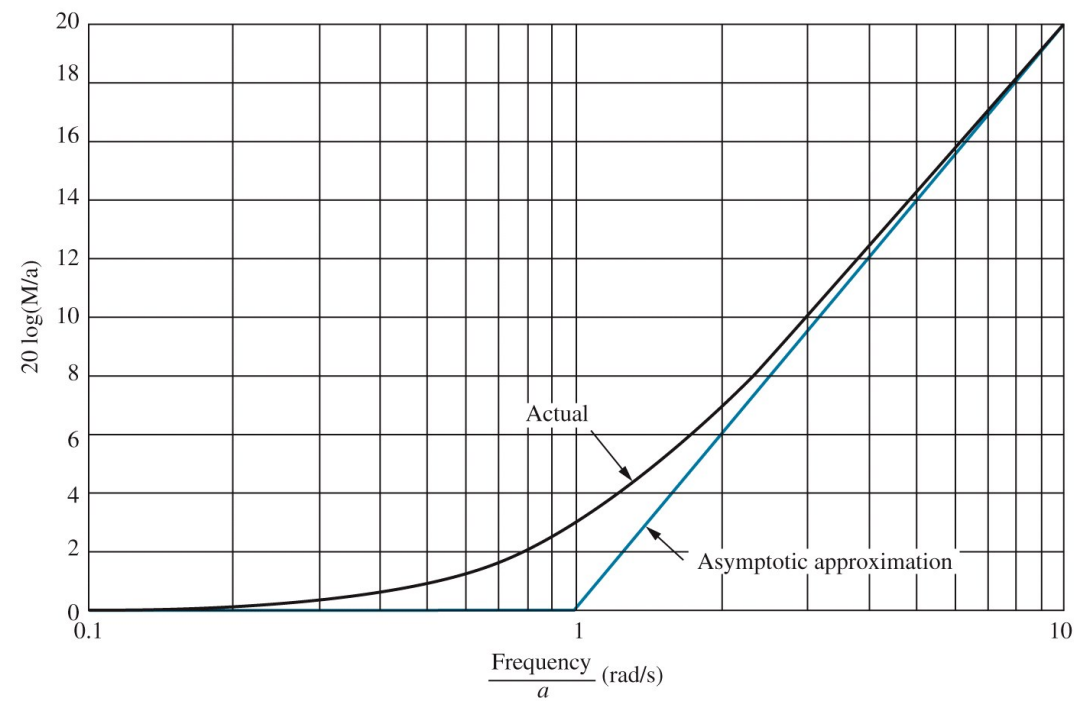


Figure 10.7
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

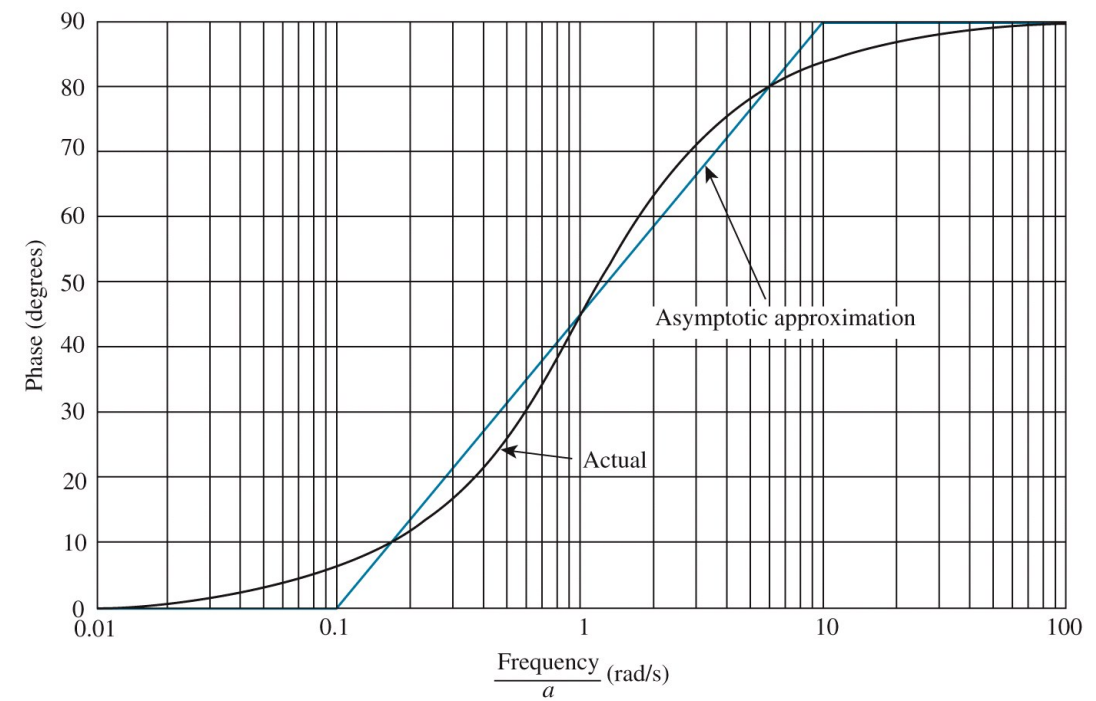


Figure 10.8
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

$$G(s) = \frac{1}{s + a} = \frac{1}{a \left(\frac{s}{a} + 1 \right)} = \frac{1}{a \left(j \frac{\omega}{a} + 1 \right)}$$

$$\text{módulo: } |G(\omega)| = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}} \quad \text{fase: } \phi = \arctan \left(-\frac{\omega}{a} \right)$$

$$\omega \ll a$$

$$|G(\omega)| = \frac{1}{a} \quad 20 \log |G(\omega)| = 20 \log \left(\frac{1}{a} \right) = -20 \log a \quad \phi \rightarrow 0$$

$$\omega \gg a$$

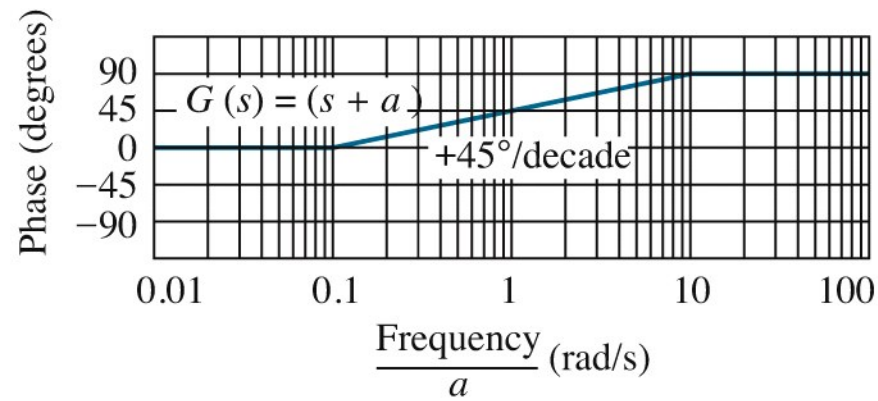
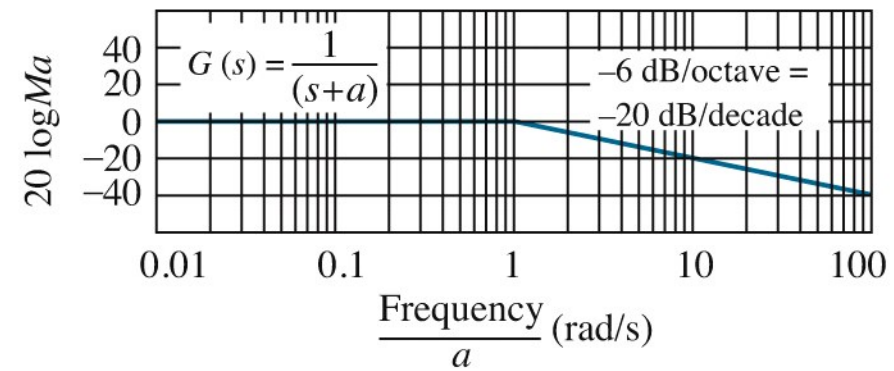
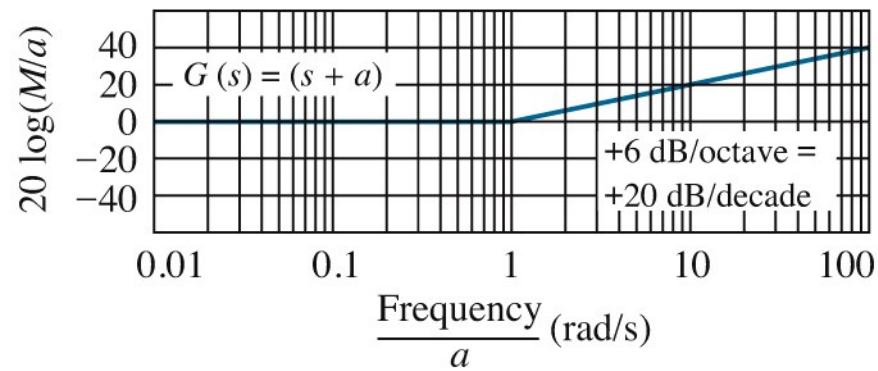
$$20 \log |G(\omega)| = 20 \log \left(\frac{1}{\omega} \right) = -20 \log \omega \quad \phi \rightarrow -90^\circ$$

$$\omega = a \quad \text{ambas aproximaciones coinciden y} \quad \phi = -45^\circ$$

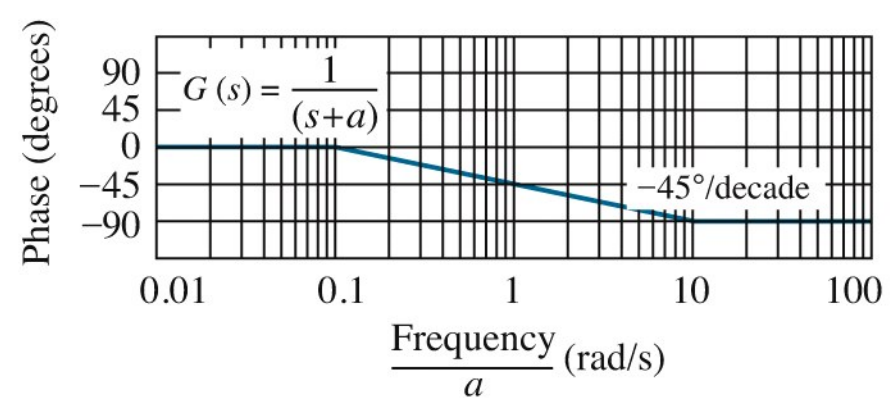
Diagramas de Bode aproximados para el caso de un polo (real); y, un cero

$$G(s) = s + a$$

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$



(c)



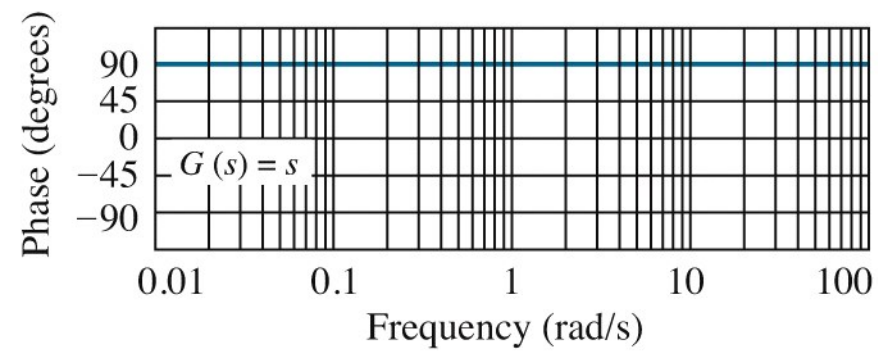
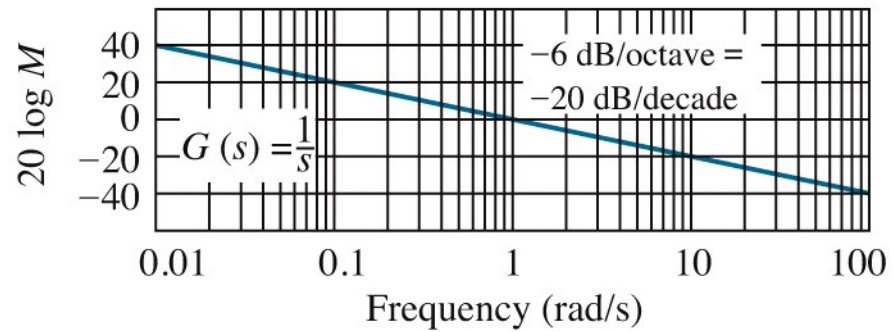
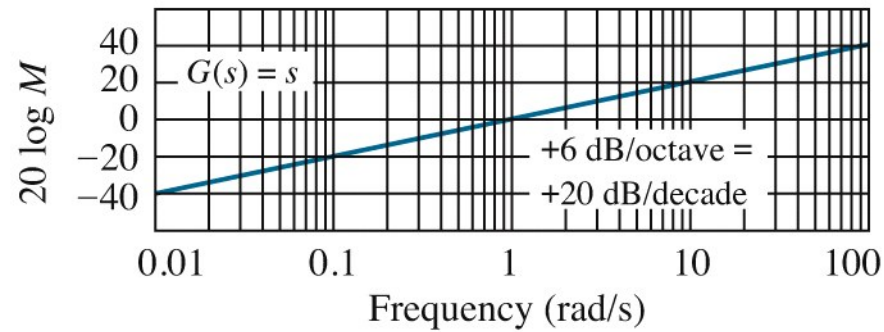
(d)

Figure 10.9cd
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

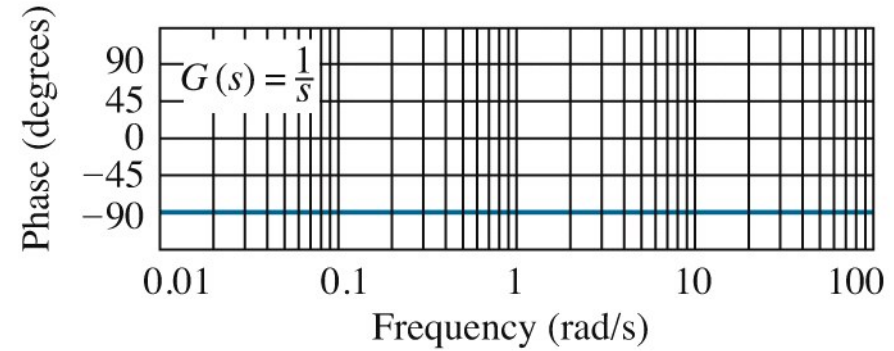
Diagramas de Bode aproximados para el caso de un polo en el origen; y, un cero en el origen

$$G(s) = s$$

$$G(s) = \frac{1}{s}$$



(a)



(b)

Figure 10.9ab
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

normalizando a la frecuencia ω_n llamamos u a la variable normalizada $u = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - u^2 + j2\xi u}$$

módulo: $\frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\xi u)^2}}$ fase: $\arctan\left(\frac{-2\xi u}{1 - u^2}\right)$

$$u \ll 1$$

$$20 \log |G(\omega)| = -10 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad \phi \rightarrow 0$$

$$u \gg 1$$

$$20 \log |G(\omega)| = -10 \log u^4 = -40 \log u \quad \phi \rightarrow -180^\circ$$

En el caso del diagrama de Bode de polos complejos conjugados, la diferencia entre la curva real y la aproximación asintótica depende del coeficiente de amortiguamiento (ξ), y la aproximación asintótica debe corregirse cuando $\xi < 0.707$

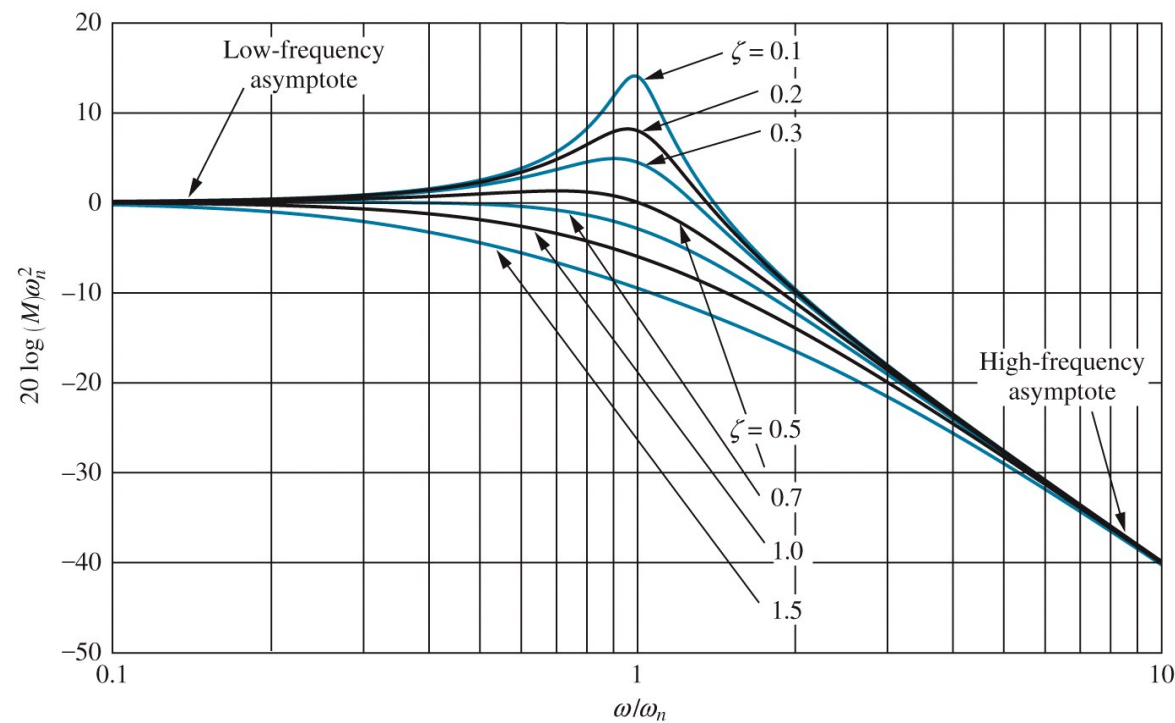


Figure 10.16
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

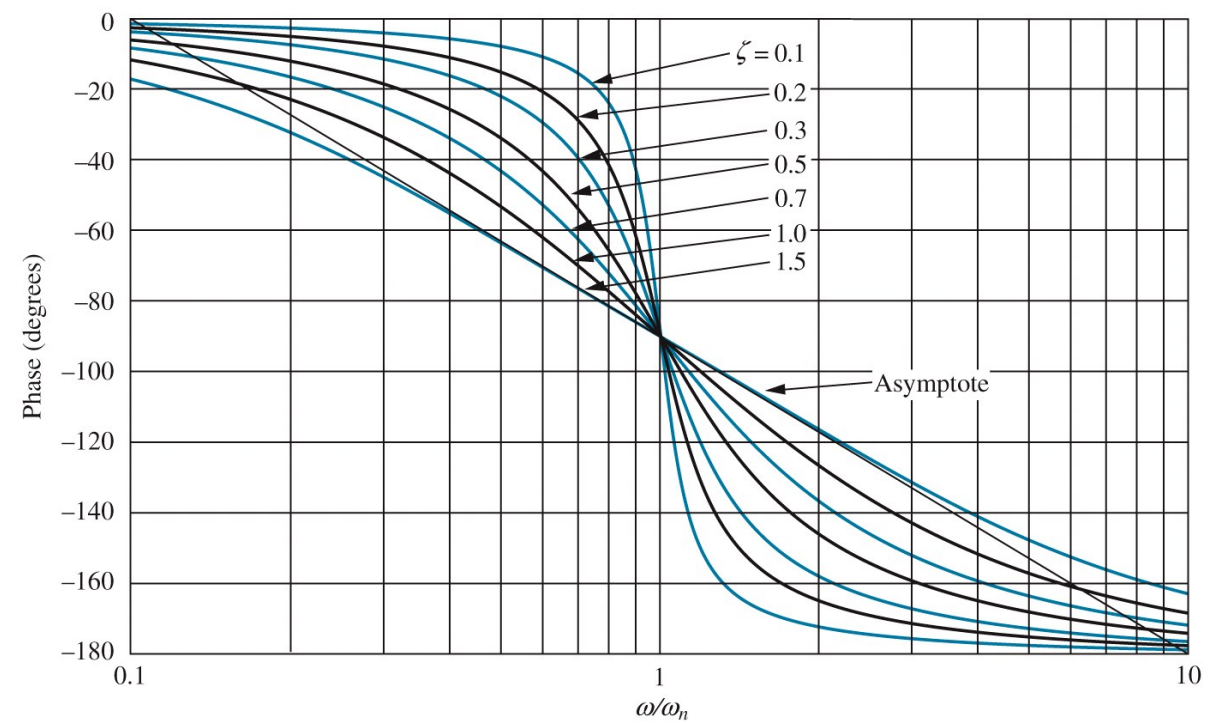


Figure 10.17
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

el valor máximo del módulo de la respuesta en frecuencia se produce a la frecuencia de resonancia:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \xi < 0.707$$

ese valor máximo del módulo es: $\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \xi < 0.707$ que se puede añadir como corrección a la aprox. asintótica

$$\text{corrección} \approx -20 \log 2\xi$$