Universidad Francisco de Vitoria UFV Madrid

Ingeniería del Conocimiento

Tema 7:
Lógica Proposicional

Departamento de Ingeniería Informática
Universidad Francisco de Vitoria

Álvaro José García Tejedor
Curso 2018/19

Objetivos del tema

- Ubicación
  - Unidad 3: **EL CONOCIMIENTO Y SU REPRESENTACION**
  - *Tema 7: Lógica Proposicional*

- Objetivos generales
  - Describir cuál es el objeto de estudio de la *Lógica*
  - Descripción de los elementos de la *Lógica Formal*
  - Presentar y definir los conceptos fundamentales de *la lógica proposicional* por su simplicidad estructural.
  - Comprender y manejar la *sintaxis y semántica* de la lógica proposicional
  - Aseverar la *validez sintáctica* o *semántica* de una fórmula lógica

Contenido

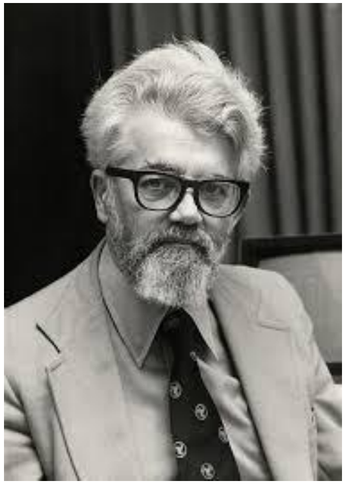
1. Introducción
2. La Lógica Formal
3. Lógica Proposicional
    1. Sintaxis
    2. Semántica
4. Validez de un Argumento
    1. Técnicas sintácticas de estudio de validez
    2. Técnicas semánticas de estudio de validez
5. Límites de la Lógica Proposicional

1. Introducción
2. La Lógica Formal
3. Lógica Proposicional
    1. Sintaxis
    2. Semántica
4. Validez de un Argumento
    1. Técnicas sintácticas de estudio de validez
    2. Técnicas semánticas de estudio de validez
5. Límites de la Lógica Proposicional

1. Introducción

- La lógica fue uno de los primeros formalismos usados por los investigadores de IA para representar estructuras de conocimiento
  - Notación versátil para cubrir los conceptos deseados
  - Es capaz de soportar procesos deductivos.

- John McCarthy fue uno de los primeros investigadores en usar la lógica para la representación del conocimiento.
  - Su "conversión" a la lógica aparece en "*Programs with Common Sense*" (1958), donde propone el lenguaje LISP cuyos datos están formados por expresiones simbólicas



1. Introducción
2. **La Lógica Formal**
3. Lógica Proposicional
   1. Sintaxis
   2. Semántica
4. Validez de un Argumento
   1. Técnicas sintácticas de estudio de validez
   2. Técnicas semánticas de estudio de validez
5. Límites de la Lógica Proposicional

2. La Lógica Formal

- Las **Lógicas** son sistemas formales para representar información que permiten obtener conclusiones.

- Lógica Formal: *"ciencia de los principios de la deducción o del razonamiento formalmente válido"*
  - Como **Ciencia**, es rigurosa y universal
  - **No se ocupa de las cualidades** de los enunciados que construimos los humanos
  - Sino del empleo de un lenguaje formal y acotado, para enunciar **hechos verdaderos o falsos.**
  - Y del estudio de las leyes generales que establecen cuando una **deducción es correcta**.
  - Estudia no sólo el conocimiento generado al deducir, sino también el **mecanismo empleado** para obtener el conocimiento

2. La Lógica Formal

- Razonamiento/Deducción/argumentación/inferencia:
  - Tipo de pensamiento que se basa en la generación de conocimiento nuevo (*la conclusión*) a partir de un conocimiento existente (*las premisas*).
- Razonamiento válido/lógico
  - *Un razonamiento es válido si la verdad de las premisas conlleva necesariamente la verdad de la conclusión*
    - Razonamiento válido

      Todos los zopiloides son pombiformes

      Arturo es un zopiloide

      ∴ Arturo es pombiforme
    - Razonamiento falaz (inválido): sus premisas no garantizan la verdad de su conclusión

      Los perros son bonitos

      El Everest es bonito

      ∴ El Everest es un perro
- No nos importa si las premisas son ciertas en el mundo real

2. La Lógica Formal

- Dos enfoques de la Lógica Formal para evaluar la validez de los razonamientos:

  - **Teoría Interpretativa** (*método semántico*):
    - Un argumento es válido cuando se comprueba que *el significado* (valor de verdad) de sus premisas y conclusiones ha de ser necesariamente el mismo (por ejemplo reduciendo al absurdo)

  - **Teoría de la Demostración** (*método sintáctico o axiomático*):
    - Un argumento es válido cuando la conclusión se obtiene *por derivación* a partir de las premisas y los axiomas del sistema, mediante el uso de reglas de inferencia correctas.

2. La Lógica Formal

- Distintas clases de "Lógicas Formales" según los aspectos del razonamiento que reflejan

Lógica	*Ontología (¿qué contiene el mundo?)*	*Epistemología (¿qué cree el agente?)*
Proposicional	Hechos	Cierto/Falso/ Desconocido
De primer orden	Hechos, objetos, relaciones	Cierto/Falso/ Desconocido
Temporal	Hechos, objetos, relaciones, tiempos	Cierto/Falso/ Desconocido
Difusa		grado de verdad, grado de creencia 0..1
De segundo orden	Objetos y conjuntos de objetos	Cierto/Falso/ Desconocido

2. La Lógica Formal

- En IA se utilizan principalmente Lógicas Clásicas
  - Lógica Proposicional/Booleana/de Predicados
    - Diseño lógico de circuitos
  - **L**ógica de **P**redicados de **P**rimer **O**rden
    - Programación lógica
    - Especificación y verificación de programas
    - Compiladores
    - Sistemas Basados en Conocimiento

- Y recientemente, Lógicas No Clásicas:
  - Lógica Difusa
    - Diseño de sistemas inteligentes
    - Modelos neuronales

1. Introducción
2. La Lógica Formal
3. Lógica Proposicional
   1. Sintaxis
   2. Semántica
4. Validez de un Argumento
   1. Técnicas sintácticas de estudio de validez
   2. Técnicas semánticas de estudio de validez
5. Límites de la Lógica Proposicional

3. Lógica Proposicional

- En lenguaje natural, una oración declarativa es aquella que afirma algo sobre el mundo. Tiene sentido preguntarse si es cierta o falsa

Proposiciones

- En lógica, oraciones declarativas o enunciados.
  - Entidades gramaticales con estructura oracional (compuesta por sujeto y predicado), que se unen a otras para construir oraciones complejas.
  - Unidad mínima de significado susceptible de ser verdadera o falsa.

La lógica proposicional o matemática estudia las proposiciones y cómo estas pueden ser verdaderas o falsas

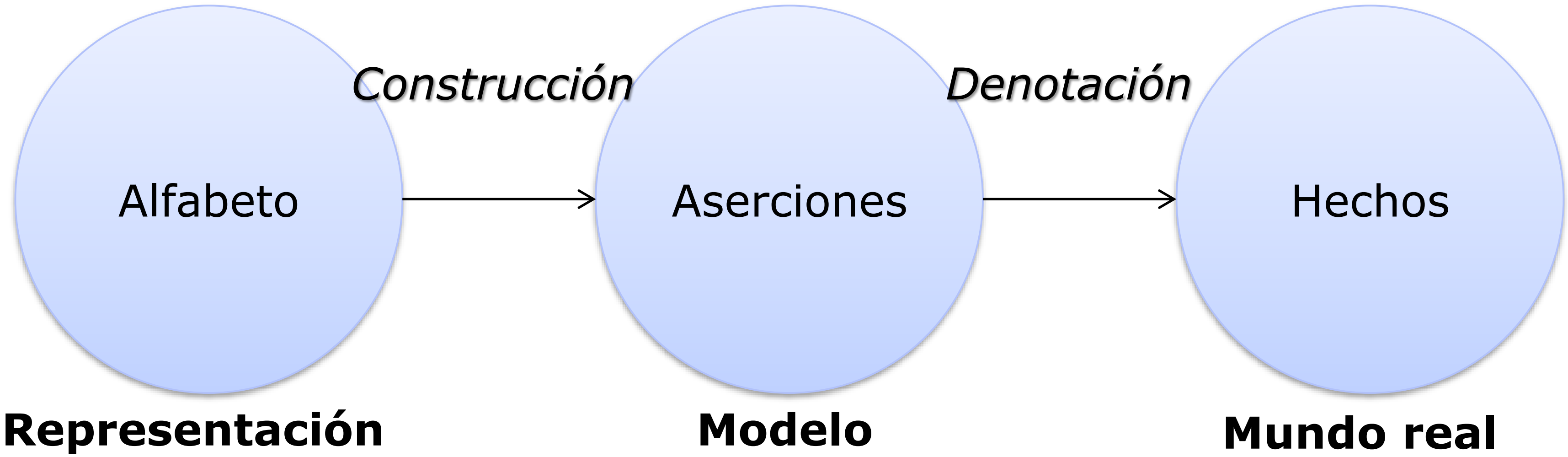
3. Lógica Proposicional

- Las proposiciones pueden ser simples o compuestas.

  - Las proposiciones simples se representan con una letra (*p*, *q*...) y se las llama proposiciones atómicas o átomos.
    - Enunciados de acción con sujeto indeterminado:
      - Llueve, hace frío.
    - Enunciados con propiedades de sujetos determinados:
      - Mi perro es blanco
      - Cristina es guapa

  - Las proposiciones compuestas se forman con la unión de dos o más proposiciones simples mediante conectores lógicos ($p \wedge q$)
    - Son proposiciones complejas
      - El perro es joven y fiero ($p \wedge q$)
      - Beberé agua o té ($p \vee q$)
      - Si mi equipo gana la liga iré a celebrarlo ($p \rightarrow q$)

3. Lógica Proposicional



Aserción: es un enunciado de un modelo (*abstracción matemática de un mundo posible*) que puede tener los valores de verdad '*verdadero*' o '*falso*'.

Denotación: es la relación que se establece entre una aserción y un hecho del mundo real.

3. Lógica Proposicional

Axiomas

Conjuntos de expresiones lógicas verdaderas que se toman como punto de partida para demostraciones ulteriores.

- Existen dos sistemas formales de lógica proposicional según la definición de sintaxis que usemos
  - Sistema axiomático simple:
    - Tiene un conjunto de axiomas (distinto según distintos autores)
      - A1: $(p \vee p) \rightarrow p$
      - A2: $p \rightarrow (p \vee q)$
      - A3: $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
      - A4: $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$ (Russell en *Principia Mathematica*)
    - Solo tiene una regla de inferencia: el Modus Ponens
  - Sistema sin axiomas: **Deducción natural**
    - Tiene un conjunto amplio de reglas de inferencia que intentan reproducir en forma de cálculo el modo en que razonamos de forma natural cuando hablamos o pensamos.

3.1 Sintaxis

- Como cualquier lenguaje, la sintaxis del lenguaje de la Lógica de Proposiciones se especifica mediante:

  - Un **conjunto de símbolos primitivos (alfabeto)**
    - El conjunto de símbolos primitivos constituirá el alfabeto del lenguaje
  - Unas **reglas de formación (gramática)**
    - Permiten generar palabras (fórmulas) válidas pertenecientes al lenguaje.
  - Unas **reglas de transformación (inferencia)**
    - Permiten transformar unas fórmulas válidas en otras fórmulas válidas pertenecientes al mismo lenguaje.

3.1 Sintaxis

Alfabeto

- En el Lenguaje Proposicional, debemos disponer de un alfabeto para poder construir los enunciados:
  - **Átomos:** T (verdadero) y ⊥ (falso).
  - **Símbolos de proposición:** *Conjunto infinito numerable de cadenas de caracteres* P, Q, R… p, q, r
  - **Conectivas:** ∧, ∨, →, ↔ y ¬ ("o", "y", "implicación", "equivalencia" y "negación")
  - **Símbolos extralingüísticos:** ( ) ,

3.1 Sintaxis

Gramática

- Los enunciados o proposiciones se pueden clasificar en:
  - *Simples* (o atómicos): p, q, r, ...
    - La carrera de Informática tiene pocas asignaturas de Matemáticas
  - *Compuestos* (moleculares): combinación de enunciados mediante conectivas.
    - La Semana Santa cae en Abril y la feria de San Isidro en Mayo, pero no me interesa
- **Fórmula**: cualquier enunciado formalizado ya sea simple o compuesto

  $$F = P \rightarrow (Q \vee R)$$

  - Sólo algunas combinaciones de átomos y conectores están permitidos.
  - Hacen falta reglas gramaticales para construir *fórmulas bien formadas* (*fbf*).

3.1 Sintaxis

- Las conectivas nos indican la “forma de componer” un enunciado compuesto a partir otros enunciados
  - monádicas: relacionan un solo enunciado
  - binarias: relacionan dos enunciados

- Reglas
  - Cualquier átomo es una *fbf (fbf atómica)*
  - Si α es *fbf* $\neg\alpha$ también lo es
  - Si α y β son *fbf*, también lo son*:*
    - $\alpha \vee \beta$ Disyunción
    - $\alpha \wedge \beta$ Conjunción
    - $\alpha \rightarrow \beta$ Implicación
    - $\alpha \leftrightarrow \beta$ Equivalencia
  - Ninguna otra fórmula es *fbf*

3.1 Sintaxis

- Prioridades:
  - 1 (mayor) : "(" , ")"
  - 2: $\neg$
  - 3: $\wedge$, $\vee$
  - 4 (menor): $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

- Ejemplo:
  - "Si tengo hambre cenaré en casa o en un bar"
    - Tengo_hambre $\rightarrow$ (Cenar_en_casa $\vee$ Cenar_en_un_bar)
    - Simplificada: $F = P \rightarrow (Q \vee R)$
  - "Si hace frío me abrigaré o me quedaré en casa"
    - $F = P \rightarrow (Q \vee R)$

3.1 Sintaxis

- Formas Normales:
  - fbf compuesta de
    - Literales: Una proposición o su negación
    - Conectores: solamente *conjunción*, *disyunción* y *negación*.
  - Hay dos tipos de formas normales:
    - Forma Normal Disyuntiva
      - *FND: fbf compuesta por una disyunción de cláusulas*

        $a_1 \vee \ldots \vee a_N$, m
      - Cláusula: conjunción de literales
      - Una FND es una contradicción si y sólo si cada una de sus conjunciones incluye una letra negada y no negada
    - Forma Normal Conjuntiva
      - *FNC: fbf compuesta por una conjunción de cláusulas*

        $a_1 \wedge \ldots \wedge a_N$, m
      - Cláusula: disyunción de literales
      - Toda fbf que no sea contradicción puede convertirse en su FNC

3.1 Sintaxis

Inferencia lógica

- Definiciones
  - Aplicación de una regla de transformación que permite convertir una *fbf* de un sistema formal en otra *fbf* del mismo sistema.
  - Derivación de conclusiones a partir de las premisas aplicando la implicación lógica

- Ambas *fbf* se relacionan mediante una relación de equivalencia, es decir, ambas tienen los mismos valores de verdad

3.1 Sintaxis

- Tipos de inferencias

  - **Deducción**: de las causas a los efectos
    - $\forall x\, p(x) \to q(x)$ si tenemos $p(A)$ podemos inferir $q(A)$

    Todos los hombres son mortales, Sócrates es un hombre, luego Sócrates es mortal
    - *Deducción*

  - **Abducción**: de los efectos a las causas
    - $\forall x\, p(x) \to q(x)$ si tenemos $q(A)$ podríamos inferir $p(A)$

    Todos los hombres son mortales, Sócrates es mortal, luego Sócrates es un hombre
    - *Diagnóstico*

  - **Inducción**: de lo particular a lo general
    - Teniendo $p(A), p(B)$, $p(C), \ldots$ podríamos inferir $\forall x\, p(x)$
    - *Aprendizaje*

3.2 Semántica

- Las **constantes** tienen su valor veritativo:
  - Se pueden considerar conectivas 0-arias
  - Símbolos y significados:
    - T: constante lógica que representa a un enunciado verdadero.
    - ⊥: constante lógica que representa a un enunciado falso

- Los **símbolos** tienen un valor arbitrario

- Para calcular el valor veritativo de un enunciado compuesto a partir de los valores de sus enunciados componentes utilizaremos una **tabla de verdad**.

X_1	X_2	$(X_1 \bullet X_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.2 Semántica

- **Negación**

  - Conectiva monádica o unitaria
  - Símbolo: ¬ (¬X se lee como "**no X**")
  - Tabla de verdad

X	¬X
1	0
0	1

  - Significado: Negación de un enunciado
  - Ejemplo:
    - p : llueve ⇒ ¬p : NO llueve

3.2 Semántica

- **Conjunción**
  - Conectiva binaria
  - Símbolo: $\wedge$ ($X_1 \wedge X_2$ se lee como "**X_1 y X_2**")
  - Tabla de verdad

X_1	X_2	$(X_1 \wedge X_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

  - Significado: Se deben verificar ambos enunciados, para que se verifique la conjunción.

3.2 Semántica

- Ejemplos:

  – $\underbrace{\text{Almodovar es de Albacete}}_{p}$ y $\underbrace{\text{Perales de Cuenca}}_{q}$

  $p \wedge q$

  – $\underbrace{\text{Sabina es de Jaén}}_{p}$ pero $\underbrace{\text{vive en Madrid}}_{q}$

  $p \wedge q$

  – $\underbrace{\text{Me gusta Asturias}}_{p}$ aunque $\underbrace{\text{esté muy lejos}}_{q}$

  $p \wedge q$

- Nota: Al formalizar podemos perder matices del lenguaje natural, pero conservamos los elementos relevantes para realización de inferencias.

3.2 Semántica

- **Disyunción**
  - Conectiva binaria
  - Símbolo: $\vee$ ($X_1 \vee X_2$ se lee como "**X_1o X_2**")
  - Tabla de verdad

X_1	X_2	$(X_1 \vee X_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

  - Significado: Se deben verificar alguno de los enunciados, (o ambos) para que se verifique la conjunción.
  - Ejemplo: Para aprobar hay que estudiar mucho o tener mucha suerte

3.2 Semántica

- **Implicación**
  - Conectiva binaria
  - Símbolo: $\rightarrow$ ($X_1 \rightarrow X_2$ se lee como "**X_1 implica X_2**")
  - Tabla de verdad

X_1	X_2	$(X_1 \rightarrow X_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

  - Significado:
    - Si X_1 es verdadero, X_2 ha de serlo para que se verifique $X_1 \rightarrow X_2$.
    - Si X_1 es falso, toda la implicación es verdadera (se puede deducir cualquier cosa de una premisa falsa)

3.2 Semántica

- Otros Significados:
  - Si X_1 entonces X_2
  - X_2 si X_1
  - X_2 siempre que X_1
  - X_1 solo si X_2
  - X_1 es condición suficiente para X_2
  - X_2 es condición necesaria para X_1

- Ejemplo: "*Si n es múltiplo de 6 entonces n es múltiplo de 2*"
  - Si se verifica que n es múltiplo de 6 (X_1), entonces debe verificarse que n sea múltiplo de 2 (X_2), para que se verifique ($X_1 \rightarrow X_2$)
  - Si no se verifica que n es múltiplo de 6 (X_1), entonces, independientemente de que n sea múltiplo de 2 (X_2), se verificará ($X_1 \rightarrow X_2$)

3.2 Semántica

- Ejemplo: "si" *versus* "sólo si"

  – $\underbrace{\text{Mi hermano ve la película}}_{p}$ si $\underbrace{\text{no hay fútbol}}_{q}$

  $q \rightarrow p$

  - Puede que vea la película habiendo fútbol
  - Se corresponde con *q* falso y *p* cierto

  – $\underbrace{\text{Mi hermano ve la película}}_{p}$ solo si $\underbrace{\text{no hay fútbol}}_{q}$

  $p \rightarrow q$

  - Si ve la película es que no hay fútbol
  - Puede que no haya fútbol y no vea la película

3.2 Semántica

- **Equivalencia**
  - Conectiva binaria
  - Símbolo: $\leftrightarrow$ ($X_1 \leftrightarrow X_2$ se lee como "**X_1si y solo si X_2**")
  - Tabla de verdad

X_1	X_2	$(X_1 \leftrightarrow X_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

  - Significado:
    - $X_1 \leftrightarrow X_2$ es equivalente a que se verifiquen $X_1 \rightarrow X_2$ y $X_2 \rightarrow X_1$.
    - Solo es verdadera si X_1 y X_2 tienen el mismo valor de verdad
  - Ejemplo:
    - ***n* es múltiplo de 10 si y sólo si es múltiplo de 2 y de 5**

3.2 Semántica

Relación con el lenguaje natural:

- **$\neg$ P** No es el caso de P, No P, No es cierto que P
- **P $\wedge$ Q** P y Q, P pero Q, P aunque Q
- **P $\vee$ Q** P o Q, Ya P ya Q ya ambas
- **P $\rightarrow$ Q** Si P entonces Q, P sólo si Q, Sólo P si Q, Es suficiente P para que Q, Siempre que P entonces Q, Es necesario Q para que P, No P a menos que Q, A no ser que Q no P
- **P $\leftrightarrow$ Q** P si y sólo si Q, P cuando y sólo cuando Q, P es condición suficiente y necesaria para que Q.

3.2 Semántica

Nombre de la conectiva	Representación	Ejemplos de frases en las que aparece
Negación	$\neg p$	no p es falso p no es cierto p
Conjunción	$p \wedge q$	p y q p pero q p sin embargo q p no obstante q p a pesar de q
Disyunción	$p \vee q$	o p o q o ambos al menos p o q como mínimo p o q
Condicional (Implicación)	$p \rightarrow q$	si p entonces q p sólo si q q si p q cuando p q es necesario para p para p es necesario q p es suficiente para q para q es suficiente p no p a menos que q
Bicondicional (Equivalencia)	$p \leftrightarrow q$	p es necesario y suficiente para q p si y sólo si q

3.2 Semántica

Construcción de enunciados en Lógica Proposicional

- *Si n es primo y mayor que dos, entonces es impar*
  - p: *n* es primo
  - q: *n* es mayor que 2 $((p \wedge q) \rightarrow r)$
  - r: *n* es impar

- *Para que un motor sea turbo no es necesario que sea gasolina*
  - p: el motor es turbo $\neg(p \rightarrow q)$
  - q: el motor es gasolina

- *Si estudio, quizás pueda o no aprobar el examen, pero si no lo hago, seguro que no aprobaré el examen*
  - p: estudio $\neg(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
  - q: apruebo el examen

3.2 Semántica

Validez lógica/Interpretación de una fórmula:

Asignación de valores V/F a una fbf a partir de los valores V/F de cada proposición que la compone

- Los significados dependen del contexto particular en el que se utilice la fórmula.
- Cada contexto se denomina **I**nterpretación.

- El valor de una proposición *F* bajo una interpretación I (Valor Interpretativo de F) se denota como $V_I(F)$
  - F es verdadera bajo la interpretación I si y sólo si I asigna el valor de verdad **V** a F.
  - F es falsa bajo la interpretación I si y sólo si I asigna el valor de verdad **F** a F.

3.2 Semántica

- Las *fbf* se pueden clasificar en función de los valores que tomen bajo las diferentes interpretaciones como:
  - Insatisfacible: Ninguna interpretación es cierta $\neg\exists\ V_I(F) = \mathbf{V}$
    - También se llaman Contradicciones o fbf inconsistentes
  - Satisfacible: Alguna interpretación es cierta $\exists\ V_I(F) = \mathbf{V}$
    - Válida ó Tautología:

      Todas las interpretaciones son ciertas $\forall\ V_I(F) = \mathbf{V}$

      $P \vee \neg P$ es siempre válida

      Son un subconjunto de las Satisfacibles

- La asignación de valores se hace con una tabla de verdad
  - Tabla que muestra el valor de verdad de una fbf compuesta para todas sus posibles interpretaciones
  - Hay 2^n posibles interpretaciones de una fórmula, donde *n* es el número de variables proposicionales de F.
    - El método tiene una complejidad exponencial lo que complica su utilización para fórmulas complejas

3.2 Semántica

- Ejemplo:

$$F = (P \to Q) \wedge (Q \to R)$$

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

3.2 Semántica

- Ejemplo:

$$F = (p \vee q) \wedge \neg p \to q$$

(silogismo disyuntivo)

p	q	$(p \vee q)$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

3.2 Semántica

- Ejemplo: ¿Cuál de estas dos proposiciones es válida?

1. Lo que es cierto, aunque no sea exacto, es verdad
2. Aunque algo sea cierto, si no es exacto, no es la verdad

fbf1: $p \wedge \neg q \rightarrow p$

fbf2: $p \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ ¬q**	**fbf1**	**fbf2**
1	1	0	0	0	**1**	**1**
1	0	0	1	1	**1**	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**1**
0	0	1	1	0	**1**	**1**

4. Validez de un Argumento

- Argumento: secuencia ordenada de fbf donde la última es llamada *conclusión* y las demás, *premisas*.

Si riego el jardín, entonces crecen las flores; (*premisa*)
Si las flores no crecen, entonces crecen las malas hierbas; (*premisa*)
Las malas hierbas crecerán en el jardín; (*premisa*)
Por lo tanto, yo riego el jardín. (*conclusión*)

p: riego el jardín
q: las flores crecen
r: las malas hierbas crecen

$(p \rightarrow q), (\neg q \rightarrow r), r$ por lo tanto p

$(p \rightarrow q), (\neg q \rightarrow r), r \vDash p$

4. Validez de un Argumento

- Un *argumento* es válido en Lógica Proposicional si:
  A. Siendo las premisas verdaderas, la conclusión también lo es (definición **semántica** de consecuencia lógica)

o

  B. La conclusión es deducible de las premisas según las reglas de inferencia (definición **sintáctica** de consecuencia lógica)

- Si un argumento, además de ser válido, tiene premisas verdaderas, entonces se dice que es *sólido*.
- Una lógica es *bien fundada* cuando sus inferencias preservan la verdad

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- Desde el punto de vista sintáctico, *un argumento es válido si las premisas pueden ser transformadas en la conclusión usando los axiomas del sistema y reglas de inferencia permitidas*.
  - Esta definición es sintáctica, ya que no hace referencia al concepto de verdad y falsedad.

- Varios tipos de inferencia. Entre otros…
  - Método de Derivación o Deducción Natural o Pruebas formales:

    Transformación de las premisas mediante *aplicación de reglas de derivación* hasta llegar a la conclusión
  - Teorema de Resolución o Principio de Refutación

    Mecanización de la deducción natural utilizando el *método refutativo (reducción al absurdo)* intentando encontrar contradicciones.

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

Reglas de Derivación

- Modus tollendo ponens (*Silogismo disyuntivo*)
- Modus ponendo ponens (*Modus ponens*)
- Modus ponendo tollens
- Modus tollendo tollens (*Modus tollens*)
- Reglas de introducción y eliminación
- Equivalencias lógicas
  - Leyes conmutativas
  - Leyes asociativas
  - Leyes distributivas
  - Leyes de Morgan (Augustus de Morgan, 1806-1871)

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- Modus ponens
  - Cada vez que encontramos una sentencia en la forma $\alpha \rightarrow \beta$ y α se afirma siendo verdad, entonces la sentencia β puede ser inferida (β debe de ser verdad también).
  - Permite eliminar una sentencia condicional de una prueba lógica o argumento

Si tomas la medicina entonces mejorarás.
Estás tomando la medicina.

Por lo tanto mejorarás.

Si A entonces B.
A.

Por lo tanto B.

$\alpha \rightarrow \beta$, α
β

Si A entonces B.
No B.

Por lo tanto no A.

$\alpha \rightarrow \beta$, $\neg \beta$
$\neg \alpha$

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- Reglas de Introducción y Eliminación
  - Cada uno de los cinco conectores lógicos puede ser introducido o eliminado, obteniendo una nueva fórmula.
  - Por esta razón para cada conector lógico habrá una regla de introducción y otra de eliminación.

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- ***Reglas de la Negación***

  - Eliminación: *Doble negación (DN)*

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

  - Introducción: *Reducción al absurdo*

$$\begin{array}{|l} A \\ B \wedge \neg B \\ \hline \end{array}$$

$$\neg A$$

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- ***Reglas de la Conjunción***
  - Eliminación (o simplificación): *De una conjunción se pueden inferir cualquiera de sus conjuntores*

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \text{o bien} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

  - Introducción

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- ***Reglas de la Disyunción***

  – Eliminación: *Prueba por casos*

$$
\begin{array}{l}
A \vee B \\
\left[\begin{array}{l} A \\ C \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l} B \\ C \end{array}\right. \\
\hline
C
\end{array}
$$

  – Introducción: *Adición*

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \text{o bien} \quad \frac{B}{A \vee B}$$

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- *Reglas del Condicional*
  - Eliminación: *Modus Ponens (MP)*

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

  - Introducción: *Teorema de Deducción (TD)*

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A \\ . \\ . \\ B \end{array}\right. \\ \hline A \to B \end{array}$$

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

Teorema de Resolución (Robinson, 1965)

- Para probar una sentencia basta con demostrar que su negación lleva a una *contradicción* (*insatisfacible*) ➔ la sentencia original es verdadera

- Basado en la aplicación de los
  - *Algoritmo de Unificación*

    Procedimiento de emparejamiento que compara dos literales y descubre si existe un conjunto de sustituciones que los haga idénticos.
  - *Algoritmo de Resolución*

    Proceso iterativo en el cual comparamos dos cláusulas llamadas cláusulas padres y producimos una nueva cláusula que se ha inferido (deducido) de ellas

4.1 Técnicas sintácticas de estudio de validez

- El teorema de Resolución se aplica sobre las *fbf* que están en Forma Normal Conjuntiva

- Cláusula de Horn: forma restringida (simple) de una FNC
  - Cláusula con, como máximo, un término positivo:

    $\neg \alpha_1 \vee \neg \alpha_2 \vee \neg \alpha_3 \ldots \vee \beta$
  - Su forma equivalente es una implicación

    $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \ldots \rightarrow \beta$
  - La resolución con Cláusulas de Horn se puede realizar con encadenamiento hacia adelante o hacia atrás

4.2 Técnicas semánticas de estudio de validez

- Desde el punto de vista semántico, *un argumento es **válido si y solo si** en **todos** los casos en que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es. Si la conclusión es falsa, al menos una premisa lo es*.
  - Esta definición es semántica, ya que hace referencia al concepto de verdad y falsedad.

- La demostración de la validez semántica de una *fbf* se lleva a cabo mediante
  - Deducción → se supone la verdad de las premisas, y aplicando las definiciones de verdad, se intenta deducir la verdad de la conclusión
  - Reducción al absurdo → se supone que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, y aplicando las definiciones de verdad, se intenta deducir una contradicción
  - Transformación del argumento en su fórmula y resolución
    - Tablas de verdad
    - Árboles semánticos

4.2 Técnicas semánticas de estudio de validez

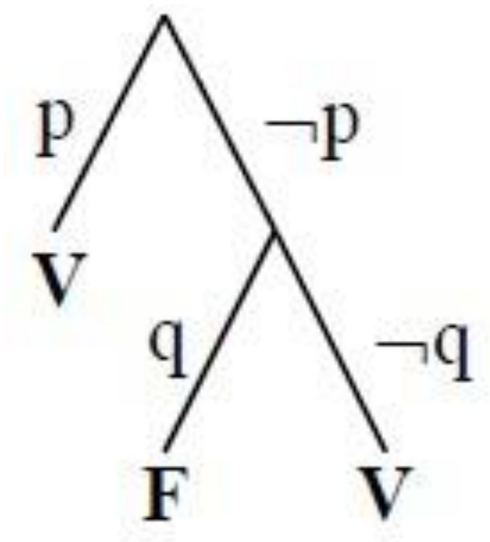
Árbol semántico

- Técnica similar a las tablas de verdad que puede simplificar la evaluación de algunas fórmulas.

  1. Se forma el conjunto LP (letras proposicionales) de la fórmula
  2. Se construye un nodo inicial del árbol (nodo actual) y se aplica: el siguiente procedimiento:
     1. Se intenta evaluar la fórmula en el nodo actual.
     2. Si es posible asignar a F un valor {V,F} se etiqueta el nodo con dicho valor y se finaliza el tratamiento del nodo actual.
     3. En caso contrario:
        - Se selecciona la primera letra *p* del conjunto LP
        - Se borra *p* de LP.
        - Se construyen dos ramas: *p* interpretado con valor V (p) y *p* interpretado con valor F ($\neg$p).
        - Repetir el procedimiento por cada uno de los dos nuevos nodos.

4.2 Técnicas semánticas de estudio de validez

- Ejemplo: $F = (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
  - Seleccionando los literales por orden alfabético, se obtiene



  - No ha sido necesario evaluar las interpretaciones
    - *p*=V, *q*=V
    - p=V, q=F.

1. Introducción
2. La Lógica Formal
3. Lógica Proposicional
   1. Sintaxis
   2. Semántica
4. Validez de un Argumento
   1. Técnicas sintácticas de estudio de validez
   2. Técnicas semánticas de estudio de validez
5. Límites de la Lógica Proposicional

5. Límites de la Lógica Proposicional

- Existen argumentos que son intuitivamente válidos, pero
  - No se pueden representar
  - Su validez no se puede probar

  con lógica proposicional.

- Para averiguar la validez de este tipos de argumentos se necesita investigar la estructura interna de las variables proposicionales.
  - La *Lógica de Predicados de Primer Orden* estudia individuos y sus relaciones (predicados) usando representaciones más complejas
    - *Luis es el hermano de Pedro*
    - *Hermano(x,y)*
  - La *Lógica de Segundo Orden* estudia los objetos y las funciones sobre los mismos ➔ los predicados pueden tomar otros predicados como argumentos

5. Límites de la Lógica Proposicional

- Otros sistemas formales permiten teorizar sobre otros tipos de argumentos

  - Lógica multivaluada:
    - Más de dos valores de verdad (verdadero/falso/desconocido)
    - *Lógica borrosa*: emplea probabilidades. Lo verdadero lo es con probabilidad P[0,1]
  - Lógica modal:
    - Los operadores modales definen modos para las proposiciones
    - *Lógica temporal*: siempre, eventualmente