MATLAB I

1.- Variables reales

• **Ejercicio 1** Introduce las siguientes instrucciones en la ventana de comandos de Matlab:

```
>> x=3;              [entrar]
>> x=3*x-1           [entrar]
```

Interpreta el resultado. Observa la diferencia entre acabar una instrucción con punto y coma o no hacerlo.

• **Ejercicio 2** Introduce

```
>> clc               [entrar]
```

¿Qué ocurre? Introduce

```
>> x                 [entrar]
```

Introduce

```
>> whos x            [entrar]
```

Introduce

```
>> clear x           [entrar]
>> x
```

¿Qué ocurre? Limpia de nuevo la ventana de comandos.

• **Ejercicio 3** Introduce en la ventana de comandos

```
>> help who          [entrar]
```

¿Qué comandos se relacionan con `who`?

• **Ejercicio 4** Introduce

```
>> x=3;y=5;          [entrar]
>> aux=x;            [entrar]
>> x=y;              [entrar]
>> y=aux;            [entrar]
>> x,y               [entrar]
```

¿Qué ha ocurrido? Introduce

```
>> clear all         [entrar]
>> clc               [entrar]
```

• **Ejercicio 5** [**POTENCIAS**] Introduce

```
>> x=3;y=4;          [entrar]
>> x^2
>> x^y
>> sqrt(x)
>> x^1/2
>> x^(1/2)
>> x^.5
>> sqrt(x^2+y^2)
```

• **Ejercicio 6** (`clear all,clc`) [**PRECISIÓN**] Escribe en la ventana de comandos de Matlab lo siguiente:

```
>> x=1e-15;y=((1+x)-1)/x                    [entrar]


>> a=1e308;b=1.1e308;c=-1.001e308;          [entrar]
>> a+(b+c)                                  [entrar]
>>  (a+b)+c                                 [entrar]


>> realmax                                  [entrar]
>> realmin                                  [entrar]
```

Busca estos comandos con ayuda de `help`. Busca también `NaN`, `Inf`.

• **Ejercicio 7** (`clear all,clc`) [**NÚMEROS COMPLEJOS**] Introduce

```
>> z=2+3i           [entrar]
>> real(z)          [entrar]
>> imag(z)          [entrar]
>> conj(z)          [entrar]
>> abs(z)           [entrar]
>> angle(z)         [entrar]
```

• **Ejercicio 8** (`clear all,clc`) [**FORMATOS NUMÉRICOS**] Introduce

```
>> pi                    [entrar]
>> format long,pi        [entrar]
>> format short,pi       [entrar]
>> format long e,pi      [entrar]
>> format short e,pi     [entrar]
>> format rat,pi         [entrar]
>> format                [entrar]
```

2.- Vectores

• **Ejercicio 9** (`clear all,clc`) Introduce

```
>> v=[1 2 3 4]      [entrar]
>> v=[1,2,3,4]      [entrar]
>> w=[1;2;3;4]      [entrar]
>> v'               [entrar]
>> v.'              [entrar]
>> c=[1+i 1-i]      [entrar]
>> c'               [entrar]
>> c.'              [entrar]
>> clear all        [entrar]
>> clc              [entrar]
```

• **Ejercicio 10** (`clear all,clc`) Introduce

```
>> u=[1:6]              [entrar]
>> u=1:6                [entrar]
>> v=[1:3:6]            [entrar]
>> v=1:2:6              [entrar]
>> w=1:.5:4             [entrar]
>> a=3:-1:1             [entrar]
>> b=linspace(1,8,2)    [entrar]
>> b=linspace(1,8,4)    [entrar]

>> b(1)                 [entrar]
>> b(2)                 [entrar]
>> b(2:4)               [entrar]
>> b(2:end)             [entrar]
>> b(2:3)               [entrar]

>> length(b)            [entrar]
>> size(b)              [entrar]
>> max(b)               [entrar]
>> min(b)               [entrar]
>> [m,c]=max(b)         [entrar]
>> sum(b)               [entrar]
>> y=cumsum(b)          [entrar]
>> y(end)               [entrar]
>> prod(b)              [entrar]
>> sort(b)              [entrar]
```

• **Ejercicio 11** (`clear all,clc`) [**OPERACIONES CON VECTORES**] Introduce

```
>> a=[1 2 3];b=[5 6 7];     [entrar]
>> a+b                      [entrar]
>> a-b                      [entrar]
>> a*b                      [entrar]
>> a*b'                     [entrar]
>> a'*b                     [entrar]
>> a.*b                     [entrar]
>> a./b                     [entrar]
```

• **Ejercicio 11 CONTINUACIÓN**

```
>> dot(a,b)                    [entrar]
>> cross(a,b)                  [entrar]
>> norm(a)                     [entrar]

>> c=[a,b]                     [entrar]
>> d=[a;b]                     [entrar]
>> cross(c(1:3),c(4:end))      [entrar]
```

Busca los comandos `dot`,`cross` y `norm` con ayuda `help`.

3.- Matrices

• **Ejercicio 12** (`clear all`,`clc`) Introduce

```
>> fila=4;columna=5;
>> eye(fila)
>> zeros(columna)
>> zeros(fila,columna)
>> ones(fila)
>> ones(fila,columna)

>> rand
>> rand(n)
>> rand(n,m)
```

• **Ejercicio 13** (`clear all`,`clc`) Introduce

```
>> A=[11,12,13;21,22,23;31,32,33]      [entrar]
>> A'                                  [entrar]
>> diag(A)                             [entrar]
>> diag([11,22,33])                    [entrar]
>> triu(A)                             [entrar]
>> tril(A)                             [entrar]
>> triu(A,1)                           [entrar]
>> triu(A,-1)                          [entrar]
>> rot90(A)                            [entrar]
>> rot90(A,2)                          [entrar]
>> A(3,:)=[]                           [entrar]
```

• **Ejercicio 14** (`clear all`,`clc`) Introduce

```
>> A=[1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12;13 14 15 16]
```

Anticipa el resultado de las siguientes operaciones:

```
>> A(3,4)
>> M1=A(1:3,2:4)
>> M2=A([1,3],[2,4])
>> M3=A(:,2:4)
```

• **Ejercicio 14 CONTINUACIÓN**

```
>> M4=A(:,[1 3 4])
>> M5=A(2:4,:)
>> M6=A(3,:)
>> M7=A(:,3)
>> M8=A(:)
>> M9=[M3;M4]
>> M10=[M3 M4]
```

• **Ejercicio 15** Construir una matriz `A` de tamaño `5×5` con números aleatorios comprendidos entre -10 y 10

1) Extraer su 4ª columna.
2) Extraer su 3ª fila.
3) Extraer la submatriz comprendida entre las filas 3 y 5 y las columnas 2 y 4.
4) Extraer los tres elementos de la esquina inferior izquierda de `A`.
5) Extraer las columnas en las que está el número máximo y mínimo.
6) Extraer las filas en las que está el número máximo y mínimo.
7) Extrae los números máximo y mínimo de `A`, y su ubicación en la matriz.

• **Ejercicio 16** [**OPERACIONES CON MATRICES**] (`clear all,clc`) Introduce

```
>> A=[1 2 3;0 1 1;0 -1 4]
>> B=[1 0 1;0 1 4;0 0 9]
>> A*B
>> A.*B
>> rank(A)
>> det(A)
>> inv(A)
>> eye(3)/A
>> A\eye(3)
>> inv(B)*A
>> B\A
>> A./B
>> 1./A
>> 1./(A*B)
>> A^2
>> A.^2
>> eig(A)
>> max(A)
>> max(max(A))
```

• **Ejercicio 17** [**FUNCIONES de MATLAB**]Averigua los siguientes comandos de matlab:

1) `sin(x),cos(x),tan(x),asin(x),acos(x),atan(x)`
2) `abs(x),exp(x),10^x,log(x),log10(x),log2(x),sqrt(x)`
3) `help rem(x,y)`

• **Ejercicio 17 CONTINUACIÓN**

Aplica los apartados 1) y 2) a:

a) `x=pi/4`
b) `x=[pi/3 pi/4 pi/2]`
c) `x=[pi/3 pi/4;pi/2 pi]`

4.- Sumando y multiplicando cosas

• **Ejercicio 18** [**BUCLES for-end**] Investiga que realizan los siguientes programas:

Programa 1
```
1    s=0;
2    for n=1:10
3         s=s+n;
4    end
5    s
```

Programa 2
```
1    p=1;
2    for n=1:10
3         p=p*n;
4    end
5    p
```

Programa 3
```
1    x=6;
2    p=1;
2    for n=1:10
3         p=p*x;
4    end
5    p
```

• **Ejercicio 19** [`function`] Genera las funciones '`sum_n.m`', '`fact_n.m`' y '`pot_n.m`' que efectúen los cálculos anteriores. El argumento de entrada debe ser un entero `n`.

• **Ejercicio 20** [`function`] Generalizar, si es preciso, las funciones '`sum_n.m`', y '`pot_n.m`' para que admitan matrices cuadradas de orden arbitrario.

• **Ejercicio 21** [**FUNCIONES-PLOT**] Representa la función $y = e^{-x}\cos(100x)$ en el intervalo $[0,1]$.

• **Ejercicio 22** [function] [**Función 'Inline'**] Introduce en la ventana de comandos

```
>> f=inline('exp(-x)*cos(x)')
>> f(0)
>> feval(f,0)

>> x=[0:0.1:1];feval(f,x)
>> f=vectorize(f)
>> y=feval(f,x)
>> plot(x,y)

>> g= inline('exp(-x).*cos(x)')
>> plot(x,g(x))

>> g=inline('exp(-x^2-y^2)*cos(x^2+y^2)','x','y')
>> g(0,0)
>> feval(g,0,0)
```

• **Ejercicio 23** [function] [**Función anónima**] Introduce en la ventana de comandos

```
>> f=@(x) exp(-x)*cos(x)
>> f(0)
>> feval(f,0)
>> x=[0:0.1:1];feval(f,x)
>> f=vectorize(f)
>> feval(f,x)

>> f=@(x) exp(-x).*cos(x)
>> y=f(x);
>> plot(x,y)

>> g=@(x,y) sin(x)*cos(y)
>> g(pi/4,0)
>> feval(g, pi/4,0)
```

• **Ejercicio 24** [function] Diseña la función

```
function [suma,epsilon]=sumatorio0(f,n1,N)

% DESCRIPCIÓN:
% sumatorio0 suma desde n1 hasta N la función f(n)
% introducida por el usuario como "inline('f(n)')"
% También invocando una función exterior cargada con 'f'
% OUTPUT:
% suma=f(n1)+f(n1+1)+f(n1+2)+···+f(N)
% epsilon=abs(s(N)-s(N-1)))
% [epsilon=estimación del error por truncamiento en sumas infinitas]
```

Emplea un bucle FOR-END. Aplícalo a los siguientes resultados:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \pi = \sum_{n=0}^{\infty}(16)^{-n}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)$$

• **Ejercicio 25** [`function`] Analiza la función (donde f puede ser `'inline'` u otro fichero `f.m`)

```
function s=sumatorio1(f,n1,N)
format long
f=vectorize(f);
n=n1:N;
x=f(n);
s=sum(x);
```

Incluye en la función anterior un argumento de salida que sea la diferencia en valor absoluto de la diferencia de los dos últimos términos del sumatorio. Añadir a `sumatorio1` un argumento de salida que sea la función cumulativa de `f`, es decir, aquella función `g` que cumple

$$g(n) = \sum_{n=n_1}^{N} f(N), \qquad n_1 \le n \le N$$

• **Ejercicio 26** [**FICHEROS**] Introduce en la ventana de comandos:

```
>> A=rand(10,5);
>> fid=fopen('PruebaMatriz.txt','w')
>> fprintf(fid,'%f',A)
>> fclose(fid)

>> fid=fopen('PruebaMatriz.txt','w')
>> fprintf(fid,'%f\n',A)
>> fclose(fid)

>> fid=fopen('PruebaMatriz','r')
>> fid=fopen('PruebaMatriz.txt','r')

>> [A,cont]=fscanf(fid,'%f')
>> [A,cont]=fscanf(fid,'%f',[10,5])

>> frewind(fid)
>> [A,cont]=fscanf(fid,'%f',[10,5])

>> frewind(fid)
>> [A,cont]=fscanf(fid,'%f',[5,inf])

>> frewind(fid)
>> [A,cont]=fscanf(fid,'%f',[4,inf])

>> frewind(fid)
>> [A,cont]=fscanf(fid,'%f',inf)
```

• **Ejercicio 27** [**Funciones con argumentos de entrada y/o salida no definidos**] Busca información sobre las funciones `varargin`, `nargin`, `varagout` y `nargout`.

Consideremos el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$Ax = b$$

donde A es una matriz $n \times n$, x y b vectores columna $n \times 1$, siendo x la incógnita y A y b los datos. Diseña una función (basada en la descomposición LU de MATLAB que buscaras en `help`) de modo que:

- Si el argumento de entrada es una matriz cuadrada A y se pidan dos argumentos de salida, resulte $[L, U]$.
- Si el argumento de entrada es una matriz cuadrada A y se pidan tres argumentos de salida, resulte $[L, U, P]$.
- Si los argumentos de entrada son A y el vector b, los argumentos de salida sean $[L, U, x]$

Solución

```
function varargout=DescLU(a,varargin)
[L,U,P]=lu(a);
% Descomposición LU
% CASO 1.- INPUT=A --> OUTPUT=[L,U]
% CASO 2.- INPUT=A --> OUTPUT=[L,U,P]
% CASO 3.- INPUT=[A,b]--> OUTPUT=[L,U,x]   (Ax=b)
if (nargin==1)&(nargout==2)
    varargout{1}=L;
    varargout{2}=U;
elseif (nargin==1)&(nargout==3)
    varargout{1}=L;
    varargout{2}=U;
    varargout{3}=P;
elseif (nargin==2)&(nargout==3)
    b=varargin{1};
    varargout{1}=L;
    varargout{2}=U;
    varargout{3}=U\(L\b);
end
return
```

• **Ejercicio 28** [**Funciones con argumentos de entrada y/o salida no definidos**] Busca información sobre las funciones `varargin`, `nargin`, `varagout` y `nargout`.

Diseña una función `argfun0` de modo que

- Si su argumento entrada es un número natural `n`, devuelva su factorial.
- Si sus argumentos de entrada son dos números naturales `n`, `m`, devuelva el factorial de ambos y el coeficiente binomial del mayor sobre el menor.

Nota: El coeficiente binomial es $\binom{n}{m} \equiv \frac{n!}{m!(n-m)!}$

• **Ejercicio 29** [**Bucles `for-end` y bucles `while-end`**] Idea básica:

- Si conocemos el número de iteraciones: Empleamos un bucle `for-end`.
- Si lo que buscamos es que se repita el bucle hasta que se satisfaga determinada condición (o condiciones): Empleamos un bucle while-end. En este caso, es conveniente introducir una condición límite de iteraciones mediante un `if-end` para evitar infinitas iteraciones.

Aplicación: [**Tolerancias**] Se sabe que la ecuación recurrente

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \\ x_0 = a_0 \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

converge al valor $\sqrt{a}$ si $a > 0,\ a_0 > 0$.

1) Escribe una función '`raiter00`' cuyos argumentos de entrada sean el valor de `a>0` y el número `N` de iteraciones y dé como resultado el valor x_{N+1}. Emplear, por tanto, un bucle `for-end`.

2) Escribe una función '`raiter01`' cuyos argumentos de entrada sean `a` y el número `N` de iteraciones y dé como resultado un vector `x=[x(1), …,x(N+1)]` que contenga los valores $x_0, x_1, \dots, x_N$, el error definido por `error=abs(x(N+1)-x(N))` y una gráfica de la sucesión $\{x_n\}$ frente a n. Emplear un bucle `for-end`.

3) ¿Cómo se podría añadir el cálculo del error en '`raiter00`'?

4) Escribe una función '`raiter02`' cuyos argumentos de entrada sean `a`, una tolerancia `tol` (de modo que si en algún paso `n` del proceso se cumple que `abs(x(N+1)-x(N))<=tol`, el programa finalice) y un número máximo `Nmax` de iteraciones permitidas, y dé como resultado el valor x_{N+1} y el número de iteraciones `niter` efectuadas, en caso de no llegar a `Nmax`.

• **Ejercicio 30** [`examen`] Introduce en la ventana de comandos `help norm`. Averigua qué significa la norma2 de una matriz.

Diseña las funciones:

1) `function [eA,error]=expA(A,N)`
2) `function [ln1A,error]=logA(A,N)`

que den el valor de las sumas respectivas (truncadas en `N` términos)

$$\exp(A) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \qquad \log(\mathbb{I} + A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} A^n$$

y los respectivos 'errores' en el sentido dado anteriormente.

• SEGUNDA PARTE: ECUACIONES NO LINEALES Y OBTENCIÓN DE RAÍCES

• **Ejercicio 31** [**Método de la bisección (o bipartición)**] (Explicación en pizarra) Escribe la función y el algoritmo correspondiente:

```
function [c,niter]=bisec0(f,a,b,tol)
% BÚSQUEDA DE CEROS POR EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN
% DATOS----------------------------------------
% f=@(x) f(x) // también llamar a 'f' // también 'inline'
% [a,b], extremos del intervalo de búsqueda
% tol=TOLERANCIA, anchura del intervalo final máximo permitido
% SALIDAS---------------------------------------
% c=solución aproximada
% niter=número de iteraciones realizadas
```

Aplicación: Aproximar la raíz de la ecuación $\sqrt{x}\sin x - x^3 + 2 = 0$ en el intervalo $[1,2]$ con un error menor que 10^{-4}. Comprobar mediante un gráfico.

• **Ejercicio 32** [**Método de Newton-Raphson 1D)**] (Explicación en pizarra) Diseña la función y el algoritmo correspondiente:

```
function [c,niter]=newtonraphson1D(f,df,x0,tol,Nmax)
% BÚSQUEDA DE CEROS POR EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (1D)
% DATOS----------------------------------------
% f=@(x) f(x) (u otra forma)
% df=@(x) 'df/dx' (u otra forma)
% x0, valor de arranque del método
% tol=TOLERANCIA, anchura del intervalo final máximo permitido abs(x(n+1)-x(n))
% Nmax=número máximo de iteraciones
% SALIDAS---------------------------------------
% c=cero aproximado por el método
% niter=número de iteraciones realizadas
```

Aplicación: Obtener $\sqrt[5]{35}$ de modo que $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$.

• **Ejercicio 33** [**Método de la secante 1D)**] (Explicación en pizarra) Diseña la función:

```
function [c,niter]=secante1(f,x0,tol,Nmax)
% MÉTODO DE LA SECANTE (1D)
% LLAMADAS--------------------------------------
% función f
% función 'newtonraphson1D'
% DATOS----------------------------------------
% x0, valor de arranque del método
% tol=TOLERANCIA, anchura del intervalo final máximo permitido abs(x(n+1)-x(n))
% Nmax=número máximo de iteraciones
% SALIDAS---------------------------------------
% c=cero aproximado por el método
% niter=número de iteraciones realizadas
```

Aplicación: Aplicar el método de la secante para encontrar una raíz de la ecuación $\cos x - x = 0$ en el intervalo $[0.5, \pi/4]$ hasta que $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$. Comprobar mediante un gráfico.

• **Ejercicio 34** [**Método de 'regula falsi'**)] (Explicación en pizarra) Diseña la función:

```
function [c,niter]=regulafalsi(f,a,b,tol,Nmax)
% MÉTODO DE LA REGULA FALSI (1D)
% LLAMADAS-------------------------------------
% función f
% DATOS----------------------------------------
% a y b, valores del intervalo Bolzano
% tol=TOLERANCIA, anchura del intervalo final máximo permitido abs(x(n+1)-x(n))
% Nmax=número máximo de iteraciones
% SALIDAS--------------------------------------
% c=cero aproximado por el método
% niter=número de iteraciones realizadas
```

Aplicación: Aplicar el método anterior a la ecuación $e^{-x} - x = 0$ en el intervalo $[0,1]$ de modo que $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$. Comprobar con un gráfico.

• **Ejercicio 35** [**Vectores y Matrices de funciones. Archivos .m**] Consideremos las funciones

$$f(x,y) = x^2 - 2x - y + 0.5, \qquad g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$$

1) Escribir una función F en Matlab cuyo argumento de entrada sea un vector columna $X = (X(1) = x, X(2) = y)$ y la salida sea el vector $Z = \big(Z(1) = f(x,y), Z(2) = g(x,y)\big)$. Aplicarlo al enunciado para $(2,0.25)$.

2) Escribir una función JF en Matlab cuyo argumento de entrada sea un vector $X = (X(1) = x, X(2) = y)$ y la salida sea la matriz jacobiana de (f,g) evaluada en X. Aplicarlo al enunciado para $(2,0.25)$.

• **Ejercicio 36** [**Método de Newton-Raphson nD**] Diseña la función

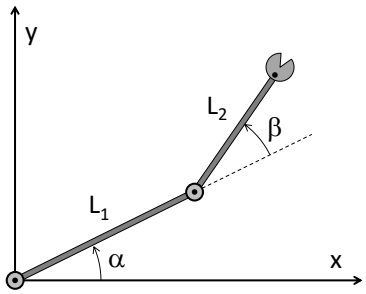
```
function [c,niter]=newtonraphsonsystem(F,JF,X0,tol)

% BÚSQUEDA DE CEROS POR EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (nD)
% DATOS----------------------------------------
% F=Función vectorial del sistema no lineal(Fichero F.m)
% JF=Jacobiano de F(Fichero JF.m)
% x0, vector valor de arranque del método
% tol=TOLERANCIA, anchura del intervalo final máximo permitido abs(x(n+1)-x(n))
% SALIDAS--------------------------------------
% c=cero vector aproximado por el método
% niter=número de iteraciones realizadas
```

• **Ejercicio 37** Calcular en el primer cuadrante la intersección entre las siguientes superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = z^2, \qquad y = x$$

Interpretar geométricamente.

• **Ejercicio 38** Se considera un brazo articulado de robot formado por un brazo 1 de longitud 20 cm que pivota en el origen de coordenadas $(0,0)$ y otro brazo 2 de longitud 10 cm que pivota sobre el extremo del primero. El movimiento del brazo transcurre en el plano xy. Se pide encontrar los ángulos α (del brazo 1 respecto al eje x) y β (del brazo 2 respecto a la dirección del brazo 1) para que el extremo libre del brazo alcance las coordenadas $(15,10)\ cm$. Dichos ángulo son inicialmente $\alpha = \beta = \pi/6$ rad. Emplear para ello un método **Newton-Raphson**.



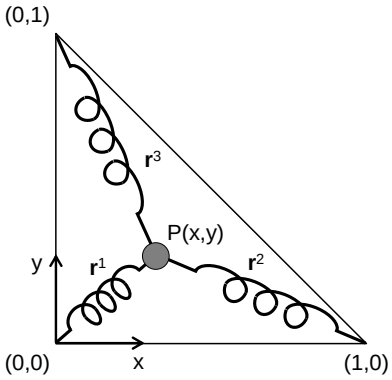
PISTA:
Las coordenadas (x, y) (en cm) del extremo del brazo vienen dadas por las ecuaciones:

$$x = 20\cos(\alpha) + 10\cos(\alpha+\beta)\,, \qquad y = 20\,\mathrm{sen}(\alpha) + 10\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)$$

• **Ejercicio 39** Three springs are arranged having one of their ends joined into a point (P) that is free to move and the other ends respectively fixed to the three corners of a rectangular triangle, see Figure. Each spring i has a relaxed length equal to 0. The relation between its force vector $\mathbf{F}^i$ and its actual length $\|\mathbf{r}^i\|$ is quadratic and can be expressed as

$$\mathbf{F}^i = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = -k\|\mathbf{r}^i\|\mathbf{r}^i = -k\sqrt{\left(x - x_0^i\right)^2 + \left(y - y_0^i\right)^2}\begin{Bmatrix} x - x_0^i \\ y - y_0^i \end{Bmatrix}$$

being k an stiffness $[N/m^2]$ and $\mathbf{r}^i = \left(x - x_0^i,\ y - y_0^i\right)$ the length vector where $\left(x_0^i,\ y_0^i\right)$ is the position of the fix end of each spring and (x, y) the position of the point P.



- Write a function that gives the value of the resulting force (vector) in the point P, due to the three springs.
  INPUT: Coordinates of point P (vector). **OUTPUT**: Force vector
- Obtain the equilibrium position of P: (x, y) at which total force is equal to zero. The Newton-Raphson method (for system of equations) should be used.

HELP:
The derivative of the force respect to the position of point P is given by

$$\frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial(x,y)} = -k\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{\|\mathbf{r}^i\|}\begin{bmatrix}\left(x - x_0^i\right)^2 & \left(x - x_0^i\right)\left(y - y_0^i\right)\\ \left(x - x_0^i\right)\left(y - y_0^i\right) & \left(y - y_0^i\right)^2\end{bmatrix}\right)$$
