ÁLGEBRA LINEAL –2° PARCIAL

Apellidos...Nombre...................Nº Mat..............

Ejercicio 1: (6 ptos)

a) Busca un contraejemplo que demuestre que la siguiente aplicación de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ NO define un producto escalar,

$$\varphi\left((x,y,z),(x',y',z')\right) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

b) Dado el endomorfismo f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

- $\operatorname{Ker} f = L\{(1,-1,0)\}$
- $S_{\lambda=1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y=0,\ x-y=0\}$
- $S_{\lambda=-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+z=0,\ x-z=0\}$

Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

b1) ¿f es diagonalizable? ¿f es diagonalizable ortogonalmente? ¿f es endomorfismo simétrico?

b2) ¿f es inyectiva? ¿f es una proyección ortogonal? ¿f es una aplicación ortogonal?

Ejercicio 2: (6 ptos)

a) Dado $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la siguiente base ortonormal de $\mathfrak{R}^3$:

$$B^{ORN} = \left\{\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}.$$

Obtén la matriz del cambio de base de la base canónica B_c a la base dada B^{ORN}.

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ razona cuál de las dos representa una aplicación ortogonal y clasifícala (sin dar los elementos geométricos).

c) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ obtén J la forma canónica de Jordan de A y las matrices P y P^{-1} tal que $P^{-1}AP=J$.

Ejercicio 3: (8 ptos)

En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar $<\,,\,>$ cuya matriz de Gram, respecto de la base canónica, es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) El ángulo que forman el primer y tercer vector de la base canónica.

b) Una base ortonormal de ($\mathfrak{R}^3$, $<,>$).

c) La proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre el plano π: x+z = 0.

d) La distancia del vector (1, 1, 1) a la recta r ortogonal al plano π: x+z=0.

Ejercicio 4: (12 ptos)

Sea en $\mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial $S = L\{(1,0,1),\ (-1,1,0)\}$:

a) Halla las ecuaciones implícitas y una base de $S^{\perp}$.

b) Obtén la matriz y las ecuaciones de la aplicación P_S proyección ortogonal sobre S.

c) Diagonaliza ortogonalmente P_S obteniendo matrices P y P^t tales que $P^t M_{P_S}(B_c, B_c)P$ sea una matriz diagonal.

d) Obtén las coordenadas del vector (-1, -1, 1) respecto de la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ obtenida en el apartado c).

Ejercicio 5: (8 ptos)

Construye, en $\mathbb{R}^2$, las matrices, respecto de la base canónica, de la simetría S_r respecto de la recta r: 4x + 3y = 0 y del giro, G_α, de ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Construye la composición $G_\alpha \circ S_r$ y clasifica la aplicación ortogonal resultante, dando los elementos geométricos.

Ejercicio 1

a) $(-2,0,1)\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=(0,0,-1)\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La matriz $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ NO es definida positiva

y por tanto, NO define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$

b) $\ker f = L\{(1,-1,0)\} = S_{\lambda=0}$

$S_{\lambda=1} = L\{(0,0,1)\}$

$S_{\lambda=-1} = L\{(0,1,0)\}$

b₁) • $\sigma(f)=\{0,1,-1\}$, los tres autovalores son distintos por tanto, tenemos tres autovectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, luego son base de autovecs.

$B_{aut} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovects. de f.

Por tanto, f es diagonalizable.

• Como $S_{\lambda=0} \not\perp S_{\lambda=-1}$ entonces f NO es diagonalizable ortogonalmente.

• Como f NO diagonalizable ortogonalmente entonces f NO endomorfismo simétrico.

b2) • $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$ luego f NO inyectiva.

• Las proyecciones ortogonales sólo tienen como autovalores el 1 y el 0 y como f tiene el autovalor $\lambda = -1$, entonces, f NO proyección ortogonal.

• Las aplicaciones ortogonales sólo tienen como autovalores reales el 1 y/o el -1, y como f tiene el autovalor $\lambda = 0$, entonces, f NO aplicación ortogonal.

Ejercicio 2

a) $MC(B^{ORN}, B_c) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ y como es un

cambio de bases ortonormales se tiene que

$$MC(B_c, B^{ORN}) = MC(B^{ORN}, B_c)^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

b) $\langle (1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{6}), (1/\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1/\sqrt{6}) \rangle = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \neq 0$

$\Rightarrow$ A NO matriz de aplicación ortogonal.

$B^t B = I \Rightarrow$ B representa una aplic. ortogonal.

$|B| = -1$ y traza$(B) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ B representa una Simetría Rotacional, donde

el eje de giro $r = S_{\lambda=-1}$ y el plano de simetría

es $\pi = S_{\lambda=-1}^{\perp}$, es decir, $r \perp \pi$.

c) $\sigma(A) = \{-4, -4, -4\}$

$S_{\lambda=-4}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{\lambda=-4} : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta \end{cases}$

$\Rightarrow S_{\lambda=-4} = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim S_{\lambda=-4} = 2$

$$S_{\lambda=-4} = \overset{\text{dim } 2}{E^1(\lambda)} \subset \overset{\text{dim } 3}{E^2(\lambda)} = \mathbb{R}^3$$

- $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \in E^2(\lambda) \\ \notin E^1(\lambda) \end{matrix}$

- $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B_{\text{aut. gen}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} P = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

$(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, $\quad G(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\cos \measuredangle (e_1, e_3) = \dfrac{\langle e_1, e_3 \rangle}{\|e_1\| \|e_3\|} = \dfrac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle (e_1, e_3) = \dfrac{3\pi}{4}$

b) $e_1' = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2' = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ya que $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$$e_3' = e_3 - \frac{\langle e_2', e_3 \rangle}{\langle e_2', e_2' \rangle} e_2' - \frac{\langle e_1', e_3 \rangle}{\langle e_1', e_1' \rangle} e_1'$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} e_2' - \frac{-1}{1} e_1'$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|e_1'\| = \|e_1\| = 1$

$\|e_2'\| = \|e_2\| = 1$

$$\|e_3'\| = \sqrt{(1,0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1,0,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

$$B^{ORN} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) $\pi: x+z=0 \Rightarrow \pi = L\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$

$$\langle \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_1}{(1,0,0)} \rangle = 0$$
$$\langle \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad B_\pi^{ORG} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$$p_\pi^\perp(1,1,1) = \langle (1,1,1), (0,1,0) \rangle (0,1,0) + \frac{\langle (1,1,1), (1,0,-1) \rangle}{\langle (1,0,-1), (1,0,-1) \rangle}(1,0,-1)$$

$$= (1,1,1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(0,1,0) + \frac{(1,1,1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}{(1,0,-1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}(1,0,-1)$$

$$= (0,1,0) + \frac{-1}{5}(1,0,-1) = \left(\frac{-1}{5}, 1, +\frac{1}{5}\right) \in \pi$$

d) $\bar{x} = p_\pi^\perp(\bar{x}) + p_r^\perp(\bar{x})$ ya que r es la recta ortogonal a π

Por tanto, $d(\bar{x}, r) = d(\bar{x}, p_r^\perp(\bar{x})) = \| \bar{x} - p_r^\perp(\bar{x}) \| =$
$$= \| p_\pi^\perp(\bar{x}) \|$$

Luego $d((1,1,1), r) = \| p_\pi^\perp(1,1,1) \| = \| \left(\frac{-1}{5}, 1, +\frac{1}{5}\right) \|$
$$= \frac{1}{5}\sqrt{(-1,5,+1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\5\\+1\end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

OBS: $p_r^\perp(\bar{x}) = \bar{x} - p_\pi^\perp(\bar{x}) \Rightarrow p_r^\perp(1,1,1) = (1,1,1) - \left(-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)$
$$= \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \in r$$

$\Rightarrow r = L\left\{ \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$ (ya que $\dim r = 1$)

Ejercicio 4

$$(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_u) \quad , \quad S = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) $S^\perp : \begin{cases} \langle (x,y,z), (1,0,1) \rangle = 0 \\ \langle (x,y,z), (-1,1,0) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ Ecs. Implic. de $S^\perp$

$$\Rightarrow B_{S^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $$P_S(x,y,z) = (x,y,z) - P_{S^\perp}(x,y,z)$$

$$= (x,y,z) - \frac{\langle (x,y,z), (1,1,-1) \rangle}{\langle (1,1,-1), (1,1,-1) \rangle} (1,1,-1)$$

$$= (x,y,z) - \frac{x+y-z}{3} (1,1,-1)$$

$$= \left(x - \frac{x+y-z}{3}, \; y - \frac{x+y-z}{3}, \; z + \frac{x+y-z}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2x-y+z), \; \frac{1}{3}(-x+2y+z), \; \frac{1}{3}(x+y+2z) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por tanto, $M_{P_S}(B_c, B_c) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Ecs. de } P_S}$

c) $\sigma(P_S) = \{1, 1, 0\}$, $S_{\lambda=1} = S$, $S_{\lambda=0} = S^\perp$

Ecs. Implícitas de S : $x+y-z=0 \Rightarrow B_S^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \right\}$

$$B_{S^\perp}^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{\text{autov.}}^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = MC(B_{\text{autov.}}^{ORN}, B_c)$$

$$\Rightarrow P^t M_{P_S}(B_c, B_c) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $\bar{v} = (-1, -1, 1) \in S^\perp$

$$\bar{v}_{B_{\text{autov.}}^{ORN}} = \left(\langle (-1,-1,1), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \rangle, \langle \bar{v}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1) \rangle, \langle \bar{v}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \rangle \right)_{B_{\text{autov.}}^{ORN}}$$

$$= \left(0, 0, -\frac{3}{\sqrt{3}}\right)_{B_{\text{autov.}}^{ORN}} = (0, 0, -\sqrt{3})_{B_{\text{autov.}}^{ORN}}$$

Ejercicio 5

$$M_{G_{\frac{\pi}{2}}}(B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{S_r}(B_c, B_c) = \frac{1}{5}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M_{G_{\frac{\pi}{2}} \circ S_r}(B_c, B_c) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 & -7 \\ -7 & -24 \end{pmatrix}$$

Como la matriz de $G_{\frac{\pi}{2}} \circ S_r$ es simétrica es una simetría respecto de la recta $S_{\lambda=1} : \begin{pmatrix} 24-25 & -7 \\ -7 & -24-25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{S_{\lambda=1} : x + 7y = 0}$ Recta de simetría