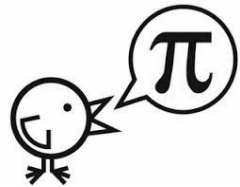


INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

LIBRO
LAS MATRICES SON FÁCILES
José Manuel Casteleiro



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

1. DEFINICIÓN DE DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Columnas

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Filas

Términos

a_{ij}

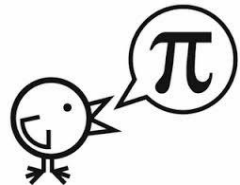
Orden
(n)

Indicativo de
fila

Indicativo de
columna

Número de
Filas n

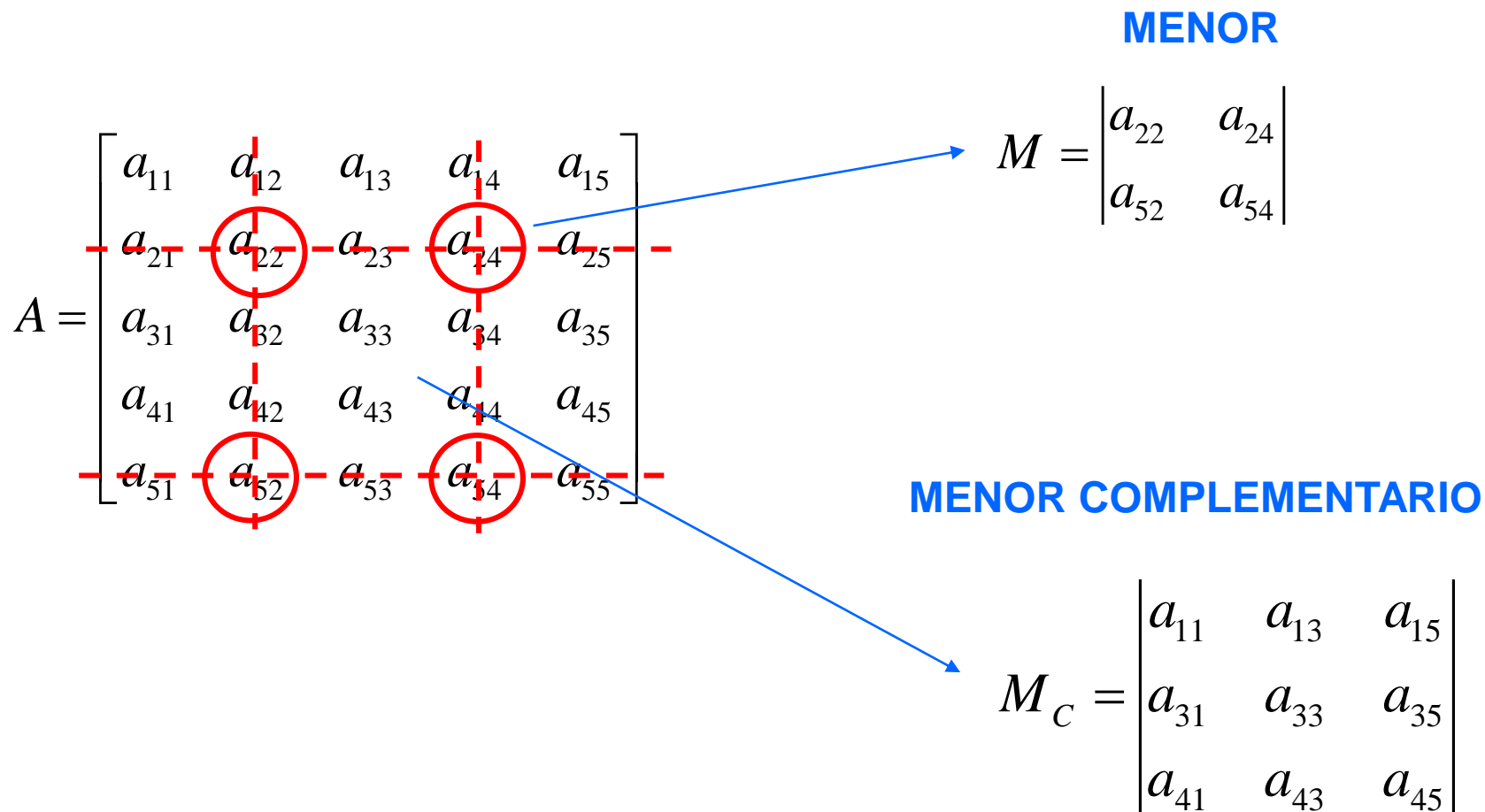
Número de
Columnas n

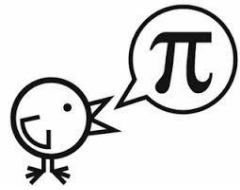


Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

2. MENOR Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UNA MATRIZ





Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

3. MENOR Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UN TÉRMINO

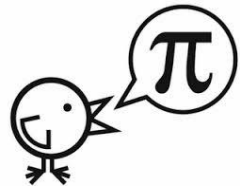
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

MENOR

$$M = |a_{32}|$$

**MENOR
COMPLEMENTARIO**

$$M_C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

4. ADJUNTO O COFACTOR DE UN TÉRMINO

$$Adj_{ij} = (-1)^{i+j} M_c$$

← MENOR COMPLEMENTARIO

Ejemplo 2.3. Hallar el adjunto a_{32}

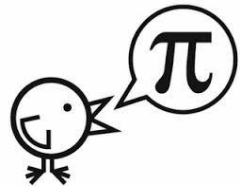
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

The element a_{32} is circled in red, and a red dashed line indicates the removal of its row and column to find the minor.

SIGNOS DE LOS ADJUNTOS

$$|A| = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} & -a_{14} & +a_{15} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} & +a_{24} & a_{25} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} & -a_{34} & +a_{35} \\ -a_{41} & +a_{42} & -a_{43} & +a_{44} & -a_{45} \\ +a_{51} & -a_{52} & +a_{53} & -a_{54} & +a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

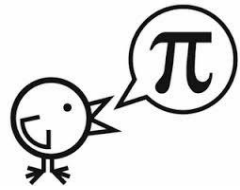
1.2 Determinantes

EJERCICIOS EN CLASE

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

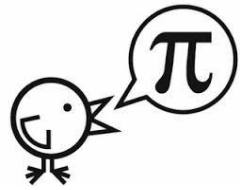
1. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 2ª fila y 1ª columna
2. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 1ª fila y 3ª columna
3. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 3ª fila y 2ª columna



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

5. CÁLCULO DE DETERMINANTES



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

5.1 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 2

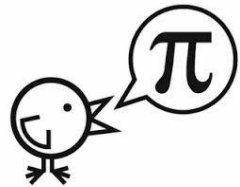
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 2.4

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$



$$|A| = (2)(2) - (-3)(1) = 7$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

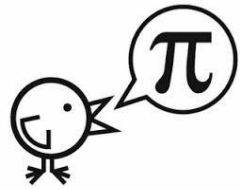
5.2 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{TÉRMINOS POSITIVOS}} - \underbrace{\left[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11} \right]}_{\text{TÉRMINOS NEGATIVOS}}$$

TÉRMINOS POSITIVOS

TÉRMINOS NEGATIVOS

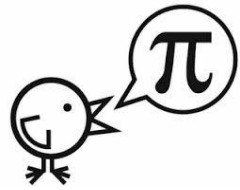


Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (9 + 8 + 1) - [6 + 2 + 6] = (18) - (14) = 4$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

EJERCICIOS EN CLASE

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

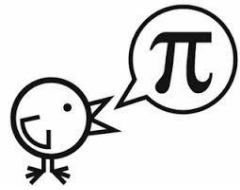
$$2. |A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$3. |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$4. |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



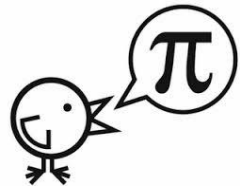
Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

6. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1ª PROPIEDAD

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \left| \begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} a & d & g \\ c & f & i \\ b & e & h \end{array} \right| \end{array} \quad \text{CAMBIA EL SIGNO}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

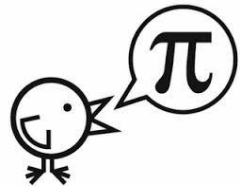
1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejemplo 2.6 Cambiar de lugar las filas 1ª y 2ª en el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$



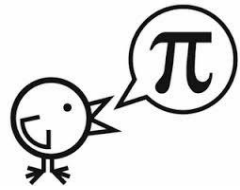
Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

2ª PROPIEDAD

$$(k) \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ kb & ke & kh \\ c & f & i \end{vmatrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

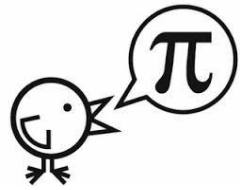
PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejemplo 2.8

Multiplicar la primera fila por (2) en el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -20$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

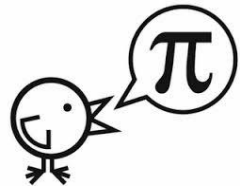
NOTA2.2

Ejemplo 2.9 Sacar los factores comunes que se puedan en el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12$$

(2)
↑

$$|A| = \begin{matrix} (2) \leftarrow \\ (3) \leftarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (12)(-1) = -12$$



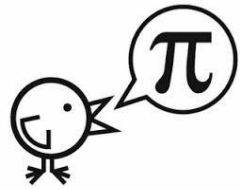
Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

3ª PROPIEDAD

$$\begin{pmatrix} k \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ ka + b & kd + e & kg + h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

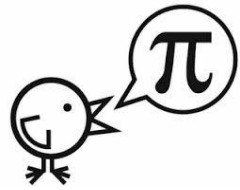
1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejemplo 2.10 Comprobar que haciendo el mayor número posible de ceros en la primera columna, el siguiente determinante no varía:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = \begin{matrix} (3)(-2) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -10$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

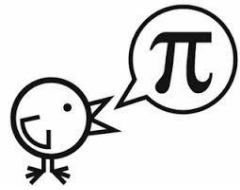
PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

4ª PROPIEDAD

$$|A| = |A^t|$$

Ejemplo 2.11 Comprobar que el determinante de la matriz A del ejemplo anterior no varía:

$$|A^t| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^t \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10$$



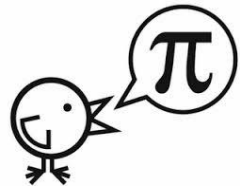
Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

5ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

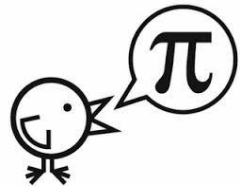
PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

6ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{e} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{f} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.12 Comprobar que el valor del siguiente determinante es nulo :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = [(-3) + (-9) + (-3)] - [(-9) + (-3) + (-3)] = (-18) + (18) = 0$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

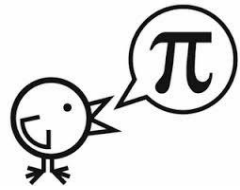
PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

7ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{kd} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{ke} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{kf} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.13 Hallar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{matrix} (3) \\ \uparrow \\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{matrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

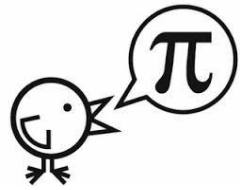
8ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a+d} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b+e} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c+f} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix} |A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{e} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.14 Comprobar la propiedad anterior con el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1+1} & 8 & 10 \\ \mathbf{2+1} & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 8 & 10 \\ \mathbf{2} & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 8 & 10 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 6 - 18 = -12$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

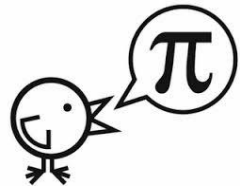
9ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a+d} & \mathbf{a} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b+e} & \mathbf{b} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c+f} & \mathbf{c} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.15 Demostrar que el siguiente determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1+d} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{2+e} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{3+f} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1+d} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{2+e} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{3+f} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{e} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{f} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = 0$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

10ª PROPIEDAD

$$|[A][B]| = |A||B|$$

Ejemplo 2.16 Comprobar la propiedad anterior con las siguientes matrices:

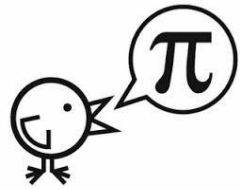
$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12 \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A||B| = (-12)(-2) = 24$$

$$|[A][B]| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ 40 & 16 & -28 \\ 17 & 12 & -19 \\ 105 & 30 & -57 \end{vmatrix} = 24$$

NOTA

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

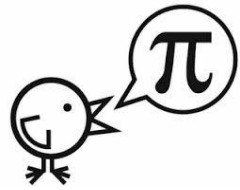
PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

NOTA2.6

Ejemplo 2.18 Sacar del siguiente determinante todos los Factores comunes por filas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 72$$

$$|A| = \begin{matrix} (2) & \leftarrow \\ (2) & \leftarrow \\ (2) & \leftarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 (9) = 72$$



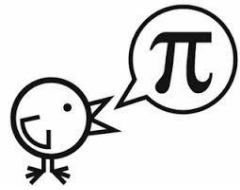
Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

7. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo: Desarrollar el determinante por los elementos de la primera columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 Adj(a_1) - a_2 Adj(a_2) + a_3 Adj(a_3) - a_4 Adj(a_4)$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

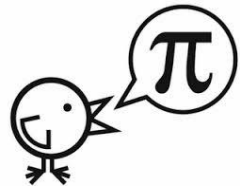
DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo 2.20 Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **tercera columna**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -12 + 2(13) - 25 = -11$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

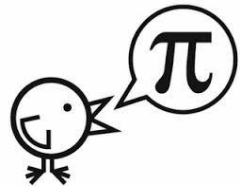
1.2 Determinantes

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo 2.21 Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **segunda fila**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = - (3) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - (3) (-3) - (2) (3) = 3$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

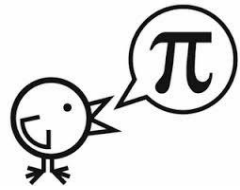
1.2 Determinantes

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **tercera columna**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = (1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(9) - (2)(3) = 3$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

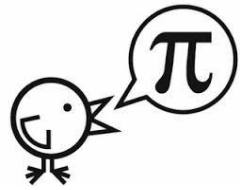
1.2 Determinantes

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **segunda columna**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = - (0) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = - (3) (-1) = 3$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

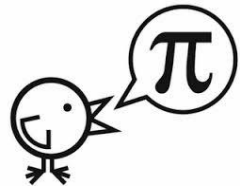
1.2 Determinantes

8. MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

Ejemplo 2.22 Calcular el siguiente determinante por el método general.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{matrix} (-1)(-2) \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

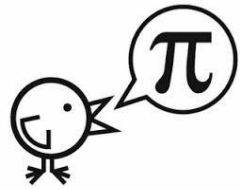


Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

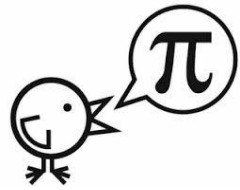
MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

Ejemplo 2.22 Calcular el siguiente determinante por los elementos de la primera fila.

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} (-3) \\ (-1) \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \\
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -11 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (+) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= (-3)(3) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = -11
 \end{aligned}$$

Páginas 112 y 113



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

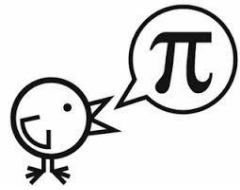
EJERCICIOS EN CLASE

Calcular los siguientes determinantes:

$$1. \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2. \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$4. \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$



Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

EJERCICIOS EN CASA

Página 125.

Del 1 y 2

Página 144

Del 1, 2, 3, 4