PROBABILIDAD. Curso 2015-2016. Convocatoria de Febrero

TEORIA

1. (0.5 puntos) Dada una clase $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω que tiene estructura de álgebra y es cerrada respecto a límites de sucesiones crecientes, demostrar que $\mathcal{A}$ también es $\sigma-$álgebra.

2. (0.5 puntos) Probar que la función de probabilidad de una variable aleatoria continua X verifica que $P(X = x) = 0$, $\forall x$.

3. (0.5 puntos) Sea $\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)$ la función característica de una variable aleatoria (X, Y). Calcular, a partir de ella, la función característica de la variable aleatoria $X - Y$.

4. (1.25 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 1/4$, $P(B/A) = 1/2$ y $P(A/B) = 1/4$. Decir si son ciertas o falsas las siguientes relaciones. Justificar la respuesta:

   a) $A \subset B$.

   b) A y B son independientes.

   c) A^C y B^C son independientes.

   d) $P\left(A^C/B^C\right) = 1/2$.

   e) $P(A/B) + P\left(A^C/B^C\right) = 1$.

5. (1.25 puntos) El resultado de un experimento aleatorio se clasifica en dos categorías: "éxitoт "fracaso". El experimento es repetido sucesivas veces hasta observar el primer "éxito".

   a) Indicar cuál es la variable aleatoria X que modeliza este experimento e indicar su función de masa.

   b) Calcular $P(X > m \mid X > n)$ y $P(X > m - n)$ con $m > n \geq 1$. Interpretar los resultados obtenidos.

PROBLEMAS

1. (2.0 puntos) Se consideran dos urnas, U_1 y U_2, donde U_1 contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras y U_2 contiene 2 bolas negras y 3 bolas blancas. Se realiza el siguiente experimento:

   Paso 1: Se toma una bola de U_1 y se traspasa a U_2. A continuación, se toma una bola de U_2 y se traspasa a U_1.

   Paso 2: Se extraen 2 bolas desde la urna U_1 resultante en el Paso 1.

   a) Calcular la probabilidad de obtener una bola blanca y una bola negra en el Paso 2.

   b) Si en el Paso 2 se han obtenido dos bolas negras, determinar la probabilidad de que en el Paso 1 se traspasara una bola blanca desde U_1 a U_2 y una bola blanca desde U_2 a U_1.

2. (2.5 puntos) La variable aleatoria bidimensional (X, Y) tiene la distribución de probabilidad conjunta dada por

$$P(X = x, Y = y) = k(x+1)(y+1), \qquad x, y = 0, 1, 2$$

   Se pide:

   a) Calcular el valor de k.

   b) Calcular las distribuciones marginales.

   c) Distribuciones de X condicionada a $Y = y$ $(y = 0, 1, 2)$

   d) ¿Son independientes X e Y?

   e) Calcular $P(X + Y > 2)$ y $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$

   f) Calcular las distribuciones de $Z = X + Y$ y de $U = X^2 + Y^2$.

3. (1.5 puntos) Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias binarias independientes, donde $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Estudiar si converge en media cuadrática y casi seguro.

$\lim_{n\to\infty} E[|X_n(\omega) - X(\omega)|^2] = 0$

$P[\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = 1$