

TEORIA

1. (0.5 puntos) Calcular el número de alumnos que debe haber en una clase para que la probabilidad de que el cumpleaños del director del colegio coincida con el de alguno de esos alumnos sea al menos de 0.5.
2. (0.5 puntos) Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad $P(X = 2^{n-1}) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. ¿Existe $E[X]$? Justifica la respuesta.
3. (0.5 puntos) Sea X una variable aleatoria con distribución Normal de media 2 y desviación típica 2. Calcular $P(|X| \leq 3)$.
4. (1.25 puntos) Sea F_X la función de distribución de una variable aleatoria X absolutamente continua. Calcular la función de distribución de la variable aleatoria $Y = \min(X, X^2)$.
5. (1.25 puntos) Definir cuándo una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple la Ley Fuerte y la Ley Débil de los grandes números. Estudiar si la sucesión de variables aleatorias independientes $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con X_n distribuida como una Poisson de parámetro $\sqrt{n}$ cumple la Ley Fuerte y/o la Ley Débil de los grandes números.

$$E.S. \stackrel{\text{Ley Fuerte}}{=} P(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) = 1$$

$$P \equiv P(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)) = 0$$

1

PROBLEMAS

- (1.5 puntos) Tenemos cien urnas de tres tipos A, B y C. La urna de tipo A contiene 8 bolas blancas y 2 negras; la urna de tipo B contiene 4 blancas y 6 negras y la urna de tipo C contiene 1 blanca y 9 negras. Se elige una de las cien urnas al azar y se extrae de ella una bola. Si la bola extraída es blanca, se sabe que la probabilidad de que la bola proceda de una urna de tipo A es $16/39$. Por otra parte, si la bola extraída es negra, se sabe que la probabilidad de que la bola proceda de una urna de tipo B es $30/61$. Calcular el número de urnas de cada tipo.
- (2.0 puntos) Dada la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3x}{40} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{[x]}{24} + \frac{3x}{40} & \text{si } 1 \leq x < 6 \\ \frac{1}{4} + \frac{3x}{40} & \text{si } 6 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

Encontrar F_1 , función de distribución discreta, F_2 , función de distribución absolutamente continua y $\lambda \in (0, 1)$ tal que $F = \lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2$.

- (2.5 puntos) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x + y) & \text{si } 0 < x < 4, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Se pide:

- Curva de regresión de Y sobre X . $\rightarrow Y = E[Y/X]$
- Razón de correlación de Y sobre X .

$$\beta_{Y|X} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}$$