CÁLCULO I (1^o GITI). CURSO 2019-20. **20/11/2019**

SOLUCIONES CONTROL Bloque 2: Derivación e Integración.

1. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right) & \text{si } x<1\\ \operatorname{arctg}(x-1) & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

a) Demuestra que es derivable y define la función $f'(x)$. ¿Es derivable f'?

b) Enuncia el teorema del valor medio.

c) Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ y encuentra los valores intermedios c que verifican su tesis.

a) Como la función $\ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ es continua y derivable (composición de una racional y el logaritmo) para $x<2$ tenemos que f es continua y derivable para $x<1$. También, como la función $\operatorname{arctg}(x-1)$ es continua y derivable para todo $x\in\mathbf{R}$ (composición de un polinomio y el arcotangente) tenemos que f es continua y derivable para $x>1$.
Nos queda justificar la continuidad y la derivabilidad en $x=1$.
Continuidad:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\left(\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)\Big|_{x=1}=\lim_{x\to 1^+} f(x)=(\operatorname{arctg}(x-1))|_{x=1}=f(1)=0.$$

Derivabilidad:

$$f'_-(1)=\left(\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)'\Big|_{x=1}=\left(\frac{1}{2-x}\right)\Big|_{x=1}=1=f'_+(1)=(\operatorname{arctg}(x-1))'|_{x=1}=\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right)\Big|_{x=1}.$$

La función $f'(x)$ queda definida:

$$\begin{array}{rccl} f': & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ & x & \longrightarrow & f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{2-x}{1}} & \text{si } x<1\\ \dfrac{}{1+(x-1)^2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}\end{array}$$

Argumentos análogos a los anteriores justifican que f' es continua y derivable en $\mathbf{R}-\{1\}$. En $x=1$, f' es continua pero no derivable porque $f''_-(1)=1$ mientras que $f''_+(1)=0$.

b) *Teorema del valor medio.* Si f es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) entonces existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) La función $f(x)$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, de manera que existe $c\in(0,2)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\pi/4+\ln 2}{2}.$$

Para encontrar los puntos c que verifican la igualdad hay que resolver, por un lado, para $c\in(0,1]$

$$\frac{1}{2-c}=\frac{\pi/4+\ln 2}{2},\ c=2-\frac{2}{\pi/4+\ln 2}\approx 0{,}647...,$$

y, por otro lado, para $c\in[1,2)$

$$\frac{1}{1+(c-1)^2}=\frac{\pi/4+\ln 2}{2},\ c=1+\sqrt{\frac{2}{\pi/4+\ln 2}-1}\approx 1{,}593...$$

2. *a*) Utiliza el método de Newton para calcular dos cifras decimales exactas de una solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la ecuación $x^3 = 3 - \tan(x)$.

   b) Utiliza la Regla de L'Hôpital para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\log(x+1)}.$$

a) Definimos la función $f(x) = x^3 - 3 + \tan(x)$, que es derivable en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La ecuación $x^3 = 3 - \tan(x)$ se puede escribir de la forma $f(x) = 0$ y podemos aplicar el método de Newton.
Para ellos definimos la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3 + \tan(x)}{3x^2 + 1 + \tan^2(x)}$$

y la iteramos desde el valor inicial $x_0 = 1$, obteniendo
$x_1 = g(1) = 1{,}06888...$ y $x_2 = g(x_1) = 1{,}06328....$
Como ya se repiten las dos primeras cifras decimales las podemos dar por buenas. La solución buscada será de la forma 1,06....

b)

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\log(x+1)} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen}(x))}{1/\log(x+1)}\right) \underset{\text{R.L'H.}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)/\operatorname{sen}(x)}{-\frac{1}{\log^2(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}}\right) =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to 0^+} (-\cos(x)(x+1)) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2(x+1)}{\operatorname{sen}(x)}\right) \underset{\text{R.L'H.}}{=} \exp\left(-\lim_{x\to 0^+} \frac{2\log(x+1)}{\cos(x)(x+1)}\right) = e^0 = 1.$$

3. Sea la función

$$f(x) = \int_0^x (4t-2)e^{-2t}\,dt$$

con dominio $[0, \infty)$.

a) Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo y calcula $f'(x)$.

b) Justifica que tiene extremos absolutos y calcúlalos.

a) *Teorema Fundamental del Cálculo.* Sea f una función continua en $[a, b]$. La función g definida para todo $x \in [a, b]$ como $g(x) = \int_a^x f(s)ds$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g'(x) = f(x)$.

$f'(x) = (4x-2)e^{-2x}$.

b) Como la función $(4x-2)e^{-2x}$ (producto de polinomio por exponencial) es continua en $\mathbf{R}$, el teorema fundamental del Cálculo nos dice que f es continua en $[0, \infty)$, derivable en $(0, \infty)$ y que su derivada es

$$f'(x) = (4x-2)e^{-2x}.$$

El signo de f' depende del de $4x - 2$, que es negativo hasta $1/2$ y positivo a partir de él. De manera que en $x = 1/2$ se alcanza el mínimo absoluto de f, que será f(1/2). El máximo absoluto de f se alcanzará en $x = 0$ siempre que $\lim_{x\to\infty} f(x) \le f(0)$.

Para calcular todos estos valores buscamos, integrando por partes, una primitiva de $(4x-2)e^{-2x}$, obteniendo $-2xe^{-2x}$. Así, el mínimo absoluto de la función es

$$f(1/2) = \int_0^{1/2} (4t-2)e^{-2t}\,dt = -2te^{-2t}\Big|_{t=0}^{t=1/2} = -\frac{1}{e},$$

y como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-2xe^{-2x}) = 0 = f(0)$$

se tiene que 0 es el máximo absoluto.

4. *a*) Para cada $b \in [0, \frac{1}{2}]$, calcula el área, $A(b)$, de la región R_b que encierran la curva $y = x - x^2$ y la recta $y = bx$.

   b) Encuentra el valor medio de la función $A(b)$ del apartado anterior para $b \in [0, \frac{1}{2}]$.

   c) Halla el volumen del sólido generado al rotar la región $R_{\frac{1}{2}}$:

   1) Alrededor del eje x.
   2) Alrededor del eje y (basta con dejar indicada la integral correspondiente).

a) Para cada $b \in [0, \frac{1}{2}]$, buscamos la intersección entre $y = x - x^2$ e $y = bx$ obteniendo dos puntos en $x = 0$ y $x = 1 - b$. Calculando los valores de los polinomios de 2º y primer grado en un punto intermedio, por ejemplo $x = (1 - b)/2$, se obtiene que el de 2º grado es mayor. Por tanto,

$$A(b) = \int_0^{1-b} (x - x^2 - bx)\, dx = \frac{1}{6}(1 - b)^3.$$

b) El valor medio de la función $A(b)$ del apartado anterior para $b \in [0, \frac{1}{2}]$ se calcula según la siguiente fórmula:

$$\bar{A}\big|_{[0,\frac{1}{2}]} = \frac{1}{1/2} \int_0^{1/2} \frac{1}{6}(1 - b)^3 db = -\frac{1}{12}(1 - b)^4 \,\Big|_{b=0}^{b=1/2} = \frac{5}{64}.$$

c) La región $R_{\frac{1}{2}}$ está situada entre $x = 0$ y $x = 1/2$ con la curva $y = x - x^2$ por encima y la recta $y = x/2$ por debajo, de manera que el volumen del sólido que se obtiene al rotarla alrededor del eje x es

$$V_1 = \int_0^{1/2} \pi \left((x - x^2)^2 - (x/2)^2\right) dx = \frac{\pi}{160}.$$

La región $R_{\frac{1}{2}}$ observada desde el eje y se sitúa entre $y = 0$ e $y = 1/4$ teniendo por debajo la curva $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4y})$ (inversa del polinomio de 2º grado) y por encima la recta $x = 2y$ (inversa del polinomio de primer grado). El volumen pedido se expresa mediante la siguiente integral:

$$V_2 = \int_0^{1/4} \pi \left((2y)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4y}\right)\right)^2 \right) dy = \frac{\pi}{96}.$$