Matemáticas Financieras
Lección 3
Leyes de Capitalización

Manuel León Navarro

CES Cardenal Cisneros

Leyes de Capitalización

Recordatorio: Son aquellas expresiones matemáticas que sirven para encontrar un capital equivalente en un momento del tiempo posterior al vencimiento $(p > t)$

En esta lección se estudiarán dos leyes fundamentales:

1. Ley de Capitalización Simple
2. Ley de Capitalización Compuesta

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Simple

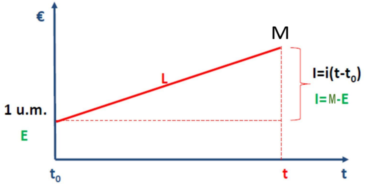
- La expresión matemática de la ley de capitalización simple para un capital (C, t) y un momento de valoración p toma la forma

$$L(C, t, p) = C\,(1 + i \cdot (p - t)) \quad \text{para} \quad t > 0$$

- Habitualmente se aplica la ley en términos del número de periodos $(t^* = p - t)$ y por unidad de cuantía:

$$L(C, t^*) = C\,(1 + i \cdot t^*) \quad \text{para} \quad t^* > 0$$

- Gráficamente, con $C = E$ si el instante es el inicial $(t = t_0)$ y $p = t$:



Capitalización Simple

- Al capital equivalente en t de las C_0 (E, efectivo) unidades monetarias iniciales se le denomina *Montante* ($M = C_0(1 + i \cdot t)$)
- Al incremento que experimenta el capital de cuantía C_0 al colocarlo durante t^* periodos se le denomina *Interés* ($I = M - C_0 = C_0 \cdot i \cdot t$)
- En la ley de capitalización simple, 1 u. m. se convierte en $1 + i \cdot t^*$ u. m. al pasar t^* periodos.
- i es el tipo de interés y mide el incremento por unidad de cuantía y de tiempo
- En esta ley, los intereses no se acumulan para generar nuevos intereses (el incremento del interés es siempre proporcional):

$$\frac{I}{t^*} = \frac{M-1}{t^*} = i \Longrightarrow M = 1 + i \cdot t^* = 1 + i \cdot (p - t)$$

Capitalización Simple

- t^* mide el tiempo durante el cual se está capitalizando. La unidad del tiempo tiene que ser exactamente la misma que la unidad temporal del i.
- Si en vez de aplicar la ley a una unidad monetaria se le aplica a una cuantía inicial E, entonces:

$$\frac{I}{t^*} = \frac{M-E}{t^*} = i_E = i \cdot E \Longrightarrow M = E(1 + i \cdot t^*) = E(1 + i \cdot (p - t))$$

- A veces los intereses llevan una retención que debe abonarse a Hacienda (τ), que es un porcentaje de lo ganado. Los intereses obtenidos liquidos obtenidos serán $I \cdot (1 - \tau)$

CARDENAL CISNEROS

Capitalizacion Simple - Ejemplo

Calcular el montante y los intereses producidos de un capital de 500 € durante 7 años a un tipo de interés simple del 5 % (o utilizando la ley de capitalización simple).

El montante, con $C_0 = 500$, $i = 0{,}05$ y $t = 7$, se convierte en:

$$M = C_0(1 + i \cdot t) = 500(1 + 0{,}05 \cdot 7) = 675e$$

Los intereses son $I = M - C_0$ con $M = 675$ y $C_0 = 500$, que se convierte en $I = 675 - 500 = 175$.
Otra forma de calcular los intereses,con $C_0 = 500$, $i = 0{,}05$ y $t = 7$ que se convierte en:

$$I = C_0 \cdot i \cdot t = 500 \cdot 0{,}05 \cdot 7 = 175e$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalizacion Simple - Ejercicio

Calcular el montante y los intereses producidos de un capital de 700 € durante 2 años a un tipo de interés simple del 8 % (o utilizando la ley de capitalización simple).

CARDENAL CISNEROS

Cálculo de magnitudes derivadas

A partir de la expresión de la ley de capitalización simple $M = C(1 + i \cdot t)$, lo normal es averiguar M una vez conocidos C, i y t, sin embargo, a veces se conoce M y la variable desconocida es:

- El valor del capital inicial (C):

$$C = \frac{M}{(1 + i \cdot t)}$$

- El número de periodos (t):

$$t = \frac{M - C}{(C \cdot i)}$$

- El tipo de interés (i):

$$i = \frac{M - C}{(C \cdot t)}$$

CARDENAL CISNEROS

Cálculo de magnitudes derivadas - Ejemplo

¿Cuanto tiempo debe pasar para que un capital de 1000 € al 7 % de interés anual simple se convierta en 1200 €?

Utilizando la expresión anterior, el tiempo que debe pasar es

$$t = \frac{1200 - 1000}{(1000 \cdot 0{,}07)} = 2{,}85$$

Es decir, deben pasar 2.85 años.

Cálculo de magnitudes derivadas - Ejemplos

1. Se invierten 10000 €al 5.00 % de interés y se desea obtener al final del periodo 16000 €, ¿en que periodo se consigue?

$$t = \frac{16000 - 10000}{(10000 \cdot 0{,}05)} = 12$$

2. ¿Cúanto dinero hay que invertir para obtener 17000 €en 10 años al 7.00

$$C_0 = \frac{17000}{(1 + 10 \cdot 0{,}07)} = 10000$$

3. Se invierten 12000 €durante 10 años y se desea obtener al final del periodo 18000 €, ¿a que tipo de interes i

$$i = \frac{18000 - 12000}{(12000 \cdot 10)} = 0{,}05$$

CARDENAL CISNEROS

Cálculo de magnitudes derivadas - Ejercicio

¿Cual es el tipo de interés utilizado si la cuantía inicial de un capital es 2000 €, el montante es 2200 € después de pasar 2 años? Suponga que se utiliza la ley de capitalización simple.

Tiempo - fracciones de año

- Como hemos visto antes, la frecuencia del tiempo tiene que ser la misma que la frecuencia del tipo. Si se aplica la ley con un tipo de interés anual el tiempo tiene que venir en años y así sucesivamente.
- Esto es especialmente importante si la ley se aplica a una operación de corto plazo (tiempo inferior al año)
- En este caso, el tiempo se incorpora en fracciones de año (numero de periodos/numero de periodos totales del año):
  - Caso mensual: Si k es el numero de meses de la operación $\Longrightarrow t = \frac{k}{12}$
  - Caso trimestral: Si k es el numero de trimestres de la operación $\Longrightarrow t = \frac{k}{4}$
  - Caso semestral: Si k es el numero de semestres de la operación $\Longrightarrow t = \frac{k}{2}$
  - Caso diario: Si n es el número de dias de la operación $\Longrightarrow t = \frac{n}{365}$ (año natural vs año comercial)

CARDENAL CISNEROS

Tiempo - fracciones de año

- En general, dada una frecuencia m (numero de periodos que forman un año) y dado l el numero de periodos que dura la operación, el tiempo en año tomará el valor

$$\frac{l}{m}$$

- Las frecuencias habituales son $m = 2$ (semestral), $m = 3$ (cuatrimestral), $m = 4$ (trimestral), $m = 6$ (bimestral), $m = 52$ (semanal)

CARDENAL CISNEROS

Tiempo - fracciones de año - año base - caso diario

- Base temporal. Al aplicar la ley financiera contando los días como unidad de frecuencia, se puede utilizar el año de 360 días (Año comercial) o de 365 (Año natural).
- La elección entre ambas bases se puede determinar entre los miembros de la operación financiera.
- Algunos mercados tienen ya preacordado el tipo de base a utilizar. Por ejemplo, las letras del tesoro se negocian siempre con base 360.
- Si se utiliza la base 360 ó base 0, el número de años al aplicar la ley será $t = \frac{n}{360}$
- Si se utiliza la base 365 ó base 5, el número de años al aplicar la ley será $t = \frac{n}{365}$
- A veces el tipo de interés en base 360 se denota i_0 y el tipo de interés en base 365 se denota i_5

CARDENAL CISNEROS

Tiempo - fracciones de año - año base - caso diario

- Siempre se puede pasar de una base a otra:

$$1 + i_0 \frac{n}{360} = 1 + i_5 \frac{n}{365}$$

Despejando se obtiene que:

$$i_0 = \frac{360}{365} i_5 \Longleftrightarrow i_5 = \frac{365}{360} i_0$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalizacion Simple - Ejemplo

Un cliente contrata una imposición a plazo (Depósito) a un banco comercial por 50000 €al 3.00 % anual el 1 de Enero con vencimiento el 30 de Junio del mismo año. Los rendimientos del capital mobiliario tienen una retención del 18 %. ¿Cuánto dinero habría que pagarle al finalizar el periodo de vigencia de la imposición?

- Para resolver el problema hay que obtener los intereses. Los intereses serán la diferencia entre la cuantía inicial $C = 50000$ y la cuantía final.
- Para obtener la cuantía final es necesario calcular el periodo de tiempo durante el que se está capitalizando. En este caso, del 1 de Enero al 30 de Junio hay 180 días. Como el tipo de interés es anual, el tiempo tiene que venir medido en años y si suponemos año natural: $t = \frac{180}{365}$ años.

Capitalizacion Simple - Ejemplo - (cont.)

- Por lo tanto:

$$M = C[1 + i \cdot t^*] = 50000[1 + 0{,}03 \cdot \frac{180}{365}] = 50739{,}73$$

- Los intereses serán $I = M - C = 50739{,}73 - 50000 = 739{,}73$
- Como hay que aplicarle un 18 % de retención, los intereses obtenidos serán $739{,}73(1 - 0{,}18) = 606{,}58$
- Por lo tanto, al cliente hay que abonarle 50606,58 y a Hacienda 133.15 €.

Capitalizacion Simple - Ejemplo

Un directivo jubilado, que ha conseguido ahorrar 500000 €durante su vida profesional, y que ahora quiere conservar, utilizando los intereses para complementar la pensión que recibe de la Seguridad Social. Decide contratar con un banco comercial la renovación trimestral de la imposición a plazo, a un 6.00 % de interés anual. Los rendimientos del capital mobiliario tienen una retención del 18 %.¿cuanto tiene que pagar cada trimestre el banco?

- Para resolver el problema hay que calcular los intereses. Los intereses serán la diferencia entre la cuantía inicial $C = 500000$ y la cuantía final.
- Para obtener la cuantía final es necesario calcular el periodo de tiempo durante el que se está capitalizando. Como el tipo de interés es anual, el tiempo tiene que venir medido en años. En este caso, cada trimestre es $\frac{1}{4} = 0{,}25$ años.

Capitalizacion Simple - Ejemplo (cont.)

- Por lo tanto:

$$M = C[1 + i \cdot t^*] = 500000[1 + 0{,}06 \cdot 0{,}25] = 507500$$

- Los intereses serán $I = M - C = 507500 - 500000 = 7500$
- Como hay que aplicarle un 18 % de retención, los intereses obtenidos serán $7500(1 - 0{,}18) = 6150$
- Por lo tanto, al cliente hay que abonarle cada trimestre 6150 €() y a Hacienda 1350 €().

CARDENAL CISNEROS

Capitalizacion Simple - Ejemplo

El Tesoro emite una Letra a 12 meses por un nominal de 1.000 €. Se utiliza el régimen de capitalización simple y el año comercial. Suponemos que el tipo de interés fijado por el mercado es del 2.938 %. ¿Qué precio tiene la Letra del Tesoro?

- El nominal N es el valor de la letra al llegar el plazo de vecimiento, que en este caso es $N = 1000$ €
- Por lo tanto, el precio hoy de la letra sera un valor E que al capitalizar durante 12 meses se obtenga $N = 1000$
- Como la letra se abonará dentro de 12 meses (365 días), y las letras se valoran utilizando el año comercial, el periodo de tiempo será $\frac{365}{360}$
- Por lo tanto:

$$N = E(1+i\cdot t) \Longleftrightarrow E = \frac{N}{1+i\cdot t} \Longrightarrow E = \frac{1000}{1+0{,}02938\cdot\frac{365}{360}} = 971{,}07$$

Capitalizacion Simple - Ejercicio

Como director financiero de su compañia tiene que decidir que hacer con líquido de 67000 €que no necesitará hasta dentro de 7 meses. Cuando negocia con el banco le ofrecen un depósito a un tipo de interés anual del 3 %. ¿Cual será el importe devuelto por el banco dentro de siete meses si contrata el depósito? ¿Cuantos han sido los intereses generados?.

Tipos de interés equivalentes

- Como la frecuencia del tiempo tiene que coincidir con la frecuencia del tipo de interés, otra opción consiste en cambiar la frecuencia del tipo de interés para adecuarla a la frecuencia del tiempo.
- Sea i_m el tipo de interés de frecuencia m. Mide el crecimiento de la cuantía de forma porcentual por cada unidad de tiempo m. Por ejemplo si se tiene $i_2 = 3\,\%$, te indica que cada semestre el capital aumenta un $3\,\%$.
- Para encontrar la relación entre i e i_m, simplemente dada una frecuencia m, el montante de la operación debe ser igual si se opera en la frecuencia m que si se opera en años (t es número de años):

$$C(1 + i \cdot t) = C(1 + i_m \cdot m \cdot t)$$

- Y despejando, se obtiene que:

$$i_m = \frac{i}{m} \Longleftrightarrow i = m \cdot i_m$$

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo

Obtener los tipos de interés equivalentes al 9 % anual para periodos 1) semestrales 2) trimestrales y 3) mensuales si se utiliza la ley de capitalización simple.

- Como hemos visto antes, el tipo de interés equivalente se obtiene con la formula $i_m = \frac{i}{m}$ y por lo tanto será:
  1. Para el caso semestral $m = 2 \Longrightarrow i_2 = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045$
  2. Para el caso trimestral $m = 4 \Longrightarrow i_4 = \frac{0{,}09}{4} = 0{,}0225$
  3. Para el caso mensual $m = 12$ y$\Longrightarrow i_12 = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075$
- Como los tipos anteriores no tienen la misma frecuencia o misma base, no son comparables.

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo

Se colocan 50000 €al 2 % trimestral durante 9 meses. Obtener los intereses que produce tomando como unidad de tiempo el trimestre y como unidad de tiempo el año.

1. Si se utiliza como unidad de tiempo el trimestre, entonces el tipo de interés que se debe utilizar es el trimestral y el tiempo que dura la operación es 9 meses. Para pasar de meses a trimestres hay que dividir entre 3, ya que son los meses que tiene cada trimestre. En este caso, 9 dividido entre 3 es 3, que es el número de trimestres. Los intereses quedan:

$$I = 50000 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{9}{3} = 3000$$

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo 2 (cont.)

1. Si te utiliza como unidad de tiempo el año, entonces se debe encontrar el tipo de interés anual. Así, como se ha visto anteriormente, el tipo de interés anual se obtiene como $i = m \cdot i_m$ que en este caso es $i = 4 \cdot 0{,}02 = 0{,}08\,\%$. Ahora el tiempo que dura la operación es $\frac{9}{12}$ años y por lo tanto:

$$I = 50000 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{9}{12} = 3000$$

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejercicio

Se colocan en el Banco 1 50000 €al 4 % trimestral durante 11 meses y en el Banco 2 20000 €al 0.5 % diario durante un año. Si se utiliza la ley de capitalización simple, ¿en cual de los dos bancos se obtiene un interés mayor?

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta

- La expresión matemática de la ley de capitalización compuesta para un capital (C, t) y un momento de valoración p toma la forma

$$L(C, t, p) = C(1+i)^{(p-t)} \quad \text{para} \quad i, t > 0$$

- Habitualmente se aplica la ley en términos del número de periodos (t^*) y por unidad de cuantía:

$$L(C, t^*) = C(1+i)^{t^*} \quad \text{para} \quad i, t > 0$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta

- Al capital equivalente en t^* de las C_0 unidades monetarias iniciales se le denomina *Montante* ($M = C_0(1+i)^{t^*}$)
- Al incremento que experimenta el capital de cuantía C_0 al colocarlo duante t^* periodos se le denomina *Interés* ($I = M - C_0 = C_0 \cdot (1+i)^{t^*}$)
- En la ley de capitalización compuesta 1 u.m. se convierte en $(1+i)^{t^*}$ u.m. al pasar t^* periodos.
- i es el tipo de interés y mide el incremento por unidad de cuantía y de tiempo
- t^* mide el tiempo durante el cual se está capitalizando. La unidad del tiempo tiene que ser exactamente la misma que la unidad temporal del i.

Capitalización Compuesta (cont.)

- En esta ley, los intereses se acumulan para generar nuevos intereses, por ejemplo si se elige un momento del tiempo $t' < t^*$:

$$I_{t^*} = C_0 \cdot (1+i)^{t^*} = [C_0 \cdot (1+i)^{t'}] \cdot (1+i)^{t^*-t'}$$

Es decir, los intereses generados hasta t' se utilizan para generar intereses hasta t^*.

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta - Interpretacion algebraica de la Ley

- Para entender mejor la ley vamos a ir desgranando periodo a periodo los elementos que intervienen en la expresión $M = C(1+i)^t$:

Periodo	Ley de capitalización compuesta
0	C_0
1	$C_1 = C_0(1+i)$
2	$C_2 = C_1(1+i) = C_0(1+i)(1+i)$
n	$C_n = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)\cdots(1+i)$

- Se observa como en cada periodo se aplica $(1+i)$ a todo el capital anterior (incluidos los intereses) y por ese motivo los intereses generan nuevos intereses

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta vs Simple - Ejemplo Numérico

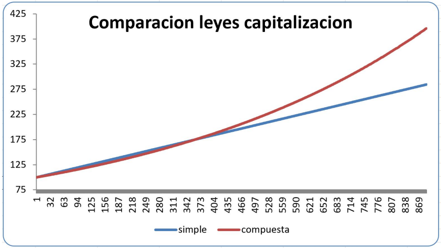
Para comparar, vamos a aplicar las leyes de capitalización a un capital de cuantía 100 euros

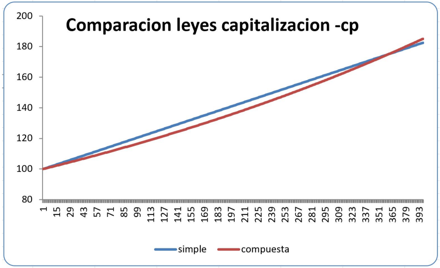
tiempo	Capitalizacion Simple				Capitalizacion Compuesta				
	M	I	I año	$\frac{\nabla M}{M}$	M	I	I año	I de I	$\frac{\nabla M}{M}$
0	100.00				100.00				
0.25	101.25	1.25			101.23	1.23			
0.5	102.50	2.50			102.47	2.47			
1	105.00	5.00	5.00	0.050	105.00	5.00	5.00		0.05
2	110.00	10.00	5.00	0.048	110.25	10.25	5.25	0.25	0.05
3	115.00	15.00	5.00	0.045	115.76	15.76	5.51	0.26	0.05
4	120.00	20.00	5.00	0.043	121.55	21.55	5.79	0.28	0.05
5	125.00	25.00	5.00	0.042	127.63	27.63	6.08	0.29	0.05
6	130.00	30.00	5.00	0.040	134.01	34.01	6.38	0.30	0.05

- En el caso de la capitalización simple, los intereses son siempre 5 euros, el 5 % de 100 euros (los intereses se retiran y siempre se calcula sobre 100 euros)
- En el caso de la capitalización compuesta los intereses no se retiran y por lo tanto generan nuevos intereses. Así, por ejemplo en el periodo 2, los 5 euros de intereses generados en el periodo 1 generan 0.25 euros de intereses y por lo tanto en ese periodo los intereses generados son 5 euros más 0.25. Este proceso se va incrementando a lo largo del tiempo

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta vs Simple - Gráficos





- El valor del montante es mayor con la ley de capitalización compuesta a partir de un año
- El valor del montante es mayor con la ley de capitalización simple en periodos inferiores al año. La diferencia es muy pequeña y por lo tanto se puede considerar una buena aproximación a la compuesta

Capitalización Compuesta vs Simple - Gráficos

- En el corto plazo, las entidades financieras prefieren la capitalización simple ya que prestan a un interés mayor.
- En el largo plazo las entidades financieras prefieren la capitalización compuesta por el mismo motivo.

Capitalización Compuesta - Ejemplo

Calcular el montante y los intereses producidos de un capital de 500 € durante 7 años a un tipo de interés compuesto del 5 % (o utilizando la ley de capitalización compuesta).

- El montante de la operación, con $C_0 = 500$, $i = 0{,}05$ y $t = 7$, es:

$$M = C_0(1+i)^t = 500(1+0{,}05)^7 = 703{,}55e$$

- Los intereses son $I = M - C_0$ con $M = 703{,}55$ y $C_0 = 500$, que se convierten en $I = 703{,}55 - 500 = 203{,}55$.
- Dicha cantidad coincide con la otra forma de calcular los intereses, con $C_0 = 500$, $i = 0{,}05$ y $t = 7$:

$$I = C_0[(1+i)^t - 1] = 500 \cdot [(1+0{,}05)^7 - 1] = 203{,}55e$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta - Ejercicio

Calcular el montante y los intereses producidos de un capital de 700 € durante 2 años a un tipo de interés compuesto del 8 % (o utilizando la ley de capitalización compuesta).

Cálculo de magnitudes derivadas

A partir de la expresión de la ley de capitalización compuesta $M = C(1+i)^t$, lo normal es averiguar M una vez conocidos C, i y t, sin embargo, a veces se conoce M y la variable desconocida es:

- El valor del capital inicial (C):

$$C = \frac{M}{(1+i)^t}$$

- El número de periodos (t):

$$t = \frac{ln(M) - ln(C)}{ln(1+i)}$$

- El tipo de interés (i):

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

CARDENAL CISNEROS

Cálculo de magnitudes derivadas - Ejemplo

¿Cuanto tiempo debe pasar para que un capital de 1000 € al 7 % de interés anual compuesto se convierta en 1200 €?

Utilizando la expresión del tiempo para la ley de capitalización compuesta, el tiempo que debe pasar es

$$t = \frac{ln(1200) - ln(1000)}{ln(1 + 0{,}07)} = 2{,}69$$

Es decir, deben pasar 2.69 años.

Se invierten 10000 €al 7.00 % de interés, y se desean obtener al final del período 19671.51 €. ¿Cuál es el plazo de la operación?

- $$t = \frac{ln(19671{,}51) - ln(10000)}{ln(1 + 0{,}07)} = 10$$

Se desean obtener 19671.51 €dentro de 10 años retribuyendo el capital a un 7.00 %. ¿qué cantidad inicial se debe invertir?

- $$C = \frac{19671{,}51}{(1 + i)^t}$$

CARDENAL CISNEROS

Cálculo de magnitudes derivadas - Ejemplos

Se invierten 10000 €, y se desean obtener al final de un período de 10 años una cantidad de 19671.51 €. ¿Cuál es el tipo de interés compuesto de la operación?

- $$i = \left(\frac{19671{,}51}{10000}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = \sqrt[10]{\left(\frac{19671{,}51}{10000}\right)} - 1 = 0{,}07$$

CARDENAL CISNEROS

Cálculo de magnitudes derivadas - Ejercicio

¿Cual es el tipo de interés utilizado si la cuantía inicial de un capital es 2000 €, el montante es 2200 € después de pasar 2 años? Suponga que se utiliza la ley de capitalización compuesta.

Capitalización Compuesta - Generalización con tipos de interés diferentes

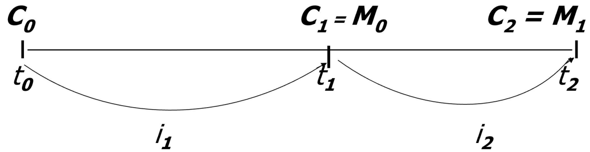
- Si suponemos que cada periodo de tiempo es diferente (t_j) y cada tipo de interés en cada periodo tambien lo es (i_j), entonces la expresion queda:
- Para el periodo 1, $C_1 = C_0(1+i_1)^{t_1}$
- Para el periodo 2, $C_2 = C_1(1+i_2)^{t_2} = C_0(1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{t_2}$
- Para el periodo 3, $C_3 = C_2(1+i_3)^{t_3} = C_0(1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{t_2}(1+i_3)^{t_3}$
- En general, para el periodo n:

$$C_n = C_{n-1}(1+i_n)^{t_n} = C_0 \prod_{j=1}^{n}(1+i_j)^{t_j}$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalización Compuesta - Generalización con tipos de interés diferentes

- Si se impone la condición $i_j = i$ y $t_j = t$ $\forall n$ (tipo de interés constante y plazos homogéneos), se obtiene la expresión de la capitalización compuesta vista al inicio del apartado: $M = C(1+i)^t$.
- Este resultado es interesante cuando hay que capitalizar uno o varios capitales pero a lo largo de la capitalización hay dos tipos de interés diferentes en dos momentos del tiempo:



Capitalizacion compuesta - tipos diferentes - ejemplo

Se contrata una imposición a plazo que va a pagar un 5.00 % anual en el período que media entre el 1 de enero y el 30 de junio del mismo año; y se renueva junto con sus intereses acumulados a dicha fecha, hasta el 1 de enero del siguiente año al 5.50 %. Determinar el capital disponible al final de la imposición si se invierten 50000 €.

- Como hay dos tipos de interés diferentes en cada periodo, primero se debe capitalizar el tiempo del primer periodo al tipo del primer periodo y despues, el montante obtenido se debe capitalizar el tiempo del segundo periodo al tipo del segundo periodo.
- En primer lugar, del 1 de enero al 30 de junio van 180 días. Como el tipo de interés de ese periodo es el 5.00 % anual, se opera todo en años (como el enunciado no dice nada suponemos año natural):

$$C_1 = 50000\,(1+0{,}05)^{\frac{180}{365}} = 51217{,}63$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalizacion compuesta - tipos diferentes - ejemplo (cont.)

- En la segunda parte, el montante C_1 se tiene que capitalizar al 5.5 %. Como del 30 de junio al 1 de enero van 185 dias, entonces el montante final es:

$$C_2 = C_1 \left(1 + 0{,}055\right)^{\frac{185}{365}} = 50000 \left(1 + 0{,}05\right)^{\frac{180}{365}} \left(1 + 0{,}055\right)^{\frac{185}{365}} = 52626{,}56$$

Capitalizacion compuesta - tipos diferentes - ejemplo

El tipo de interés al que una entidad remunera sus cuentas de depósito es del 4.00 % anual, previéndose que a los dos años el tipo de interés se reduzca al 3.00 % anual. Determinar la cuantía acumulada en dicha cuenta al cabo de cinco años si se liquida bajo el régimen de capitalización compuesta a partir de una inversión inicial de 1000 €.

- Como hay dos tipos de interés diferentes en cada periodo, primero se debe capitalizar el tiempo del primer periodo al tipo del primer periodo y despues, el montante obtenido se debe capitalizar el tiempo del segundo periodo al tipo del segundo periodo.
- En primer lugar, en los dos primeros años como el tipo de interés de ese periodo es el 4.00 % anual, el montante final será

$$C_1 = 1000\,(1 + 0{,}04)^2 = 1081{,}6$$

Capitalizacion compuesta - tipos diferentes - ejemplo (cont.)

- En la segunda parte, el montante C_1 se tiene que capitalizar al 3.00 % durante los tres años que restan. Por lo tanto, el montante final es:

$$C_2 = C_1 (1 + 0{,}03)^3 = 1000 (1 + 0{,}04)^2 (1 + 0{,}03)^3 = 1181{,}89$$

CARDENAL CISNEROS

Capitalizacion compuesta - tipos diferentes - ejercicio

Acaba de cobrar una factura de 23000 euros y quiere obtener un rendimiento de dicho efectivo. Cuando va al banco le ofrecen un depósito de 5 meses hasta final de año a un tipo de interés del 4 % en capitalización simple. Posteriormente, al principio del año trasladaran lo obtenido en dicho depósito a otro, con una duración de dos años a un tipo de interés del 2.5 % en capitalización compuesta. Obtenga el valor del efectivo al finalizar la operación y los intereses obtenidos.

CARDENAL CISNEROS

Tipo de interés anual equivalente (TAE)

- Al igual que ocurría con la capitalizacion simple, en capitalizacion compuesta podemos tener un tipo de interés de frecuencia inferior al año. Por ejemplo, podemos tener un tipo de interés mensual (i_{12}) que mide el crecimiento cada mes, un tipo de interés trimestral, etc.
- Como la frecuencia del tiempo tiene que coincidir con la frecuencia del tipo de interés, una opcion es cambiar la frecuencia del tiempo para ajustarla al tipo de interés (por ejemplo pasar de semanas a años, de trimestres a meses, etc...)
- Otra opción consiste en cambiar la frecuencia del tipo de interés para adecuarla a la frecuencia del tiempo. Además, esto es importante porque la forma de comparar tipos de interés es igualando la frecuencia. El caso mas importante es el tipo de interés anual equivalente, que mide el crecimiento si el tipo de interés se mantuviera un año. Dicho tipo se denomina TAE.

CARDENAL CISNEROS

Tipo de interés anual equivalente (TAE)

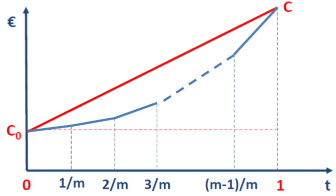
- Para encontrar la relación entre i e i_m, simplemente dada una frecuencia m, el montante de la operación debe ser igual si se opera en la frecuencia m que si se opera en años (t es número de años):

$$C_0(1+i)^t = C_0(1+i_m)^{m \cdot t}$$

- Y despejando, se obtiene que:

$$1+i = (1+i_m)^m$$

Que es la relación entre el tipo de interés anual equivalente (TAE) ó efectivo anual y el tipo de interés de frecuencia m.



Tambien se puede interpretar como que ambos tipos representan la relación de equivalencia entre la capitalización simple (linea roja) y la capitalizacion compuesta a un tipo i_m.

Tipo de interés Nominal - TIN

- La relación no lineal entre los tipos de interés i e i_m viene de que como los intereses generan nuevos intereses, para que el interes anual sea equivalente tiene que ser mayor.
- Por ejemplo, sea $i_4 = 2\,\%$. Si cada trimestre genera un $2\,\%$ lo lógico sería pensar que al final del año se generaría un $2+2+2+2 = 8\,\%$. Sin embargo si aplicamos la expresión anterior:

$$i = (1 + i_m)^m - 1 = (1 + 0{,}02)^4 = 0{,}824$$

Es decir, el tipo de interés anual equivalente es un $8.24\,\%$, mayor que el $8\,\%$ que tendríamos de forma intuitiva. La razon es que como los intereses generan nuevos intereses, al llegar al primer trimestre se generan intereses, que al llegar al segundo trimestre generan nuevos intereses y por lo tanto al final del año se generan los intereses de cada periodo más los que los intereses han ido generando a lo largo del año (los intereses de los intereses).

CARDENAL CISNEROS

Tipo de interés Nominal - TIN

- Por motivos comerciales, debido a que no todas las personas tienen conocimiento de finanzas es obligatorio publicar un tipo de interes que sea fácil de calcular e interpretar. Dicho tipo es el tipo de interés nominal de frecuencia m (TIN), que es la proyección lineal de los tipos de interés de frecuencia inferior al año.

$$j_m = m \cdot i_m$$

- Si tenemos un $i_4 = 2\,\%$, el tipo de interés nominal (TIN) asociado es

$$j_4 = 4 \cdot i_4 = 4 \cdot 0{,}02 = 0{,}08$$

Que es el tipo de interés anual intuitivo. No es el correcto de forma exacta, pero es con el que se puede comparar de forma rapida entre opciones de tipos inferiores al año.

CARDENAL CISNEROS

Tipo de interés Nominal - TIN

- Relacion de los tres:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m = (1+i_m)^m$$

- $j_m < i$ ya que hay que tener en cuenta los intereses generados por los propios intereses en cada subperiodo.
- Por ejemplo, a igual j, ¿que i seria mas grande, el de $m = 4$ o el de $m = 12$?.
- Las entidades bancarias los utilizan como estrategia comercial para captar negocio. En operaciones crediticias ofrecen el tipo nominal y en operaciones de depósito se ofrece T.A.E.

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo

Sea un tipo de interés trimestral del 3 % ($i_4 = 3\,\%$) calcule el tipo de interés nominal (TIN) y el tipo efectivo (TAE).

- El TIN será $j_4 = m \cdot i_4$ con $m = 4$, por lo tanto $j_4 = 4 \cdot 3 = 12\,\%$
- El TAE será $i = (1 + i_m)^m - 1 = (1{,}03)^4 - 1 = 0{,}1255088 \simeq 12{,}55\,\%$

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo

Si el banco le ofrece un depósito a un tipo nominal del 6 % de frecuencia mensual (TIN). Calcule el tipo de interés mensual y el tipo efectivo anual (TAE) de dicho depósito.

- El tipo de interés mensual se obtiene a partir de la relación entre i_{12} y j_{12} $i_{12} = \frac{j_{12}}{m} = \frac{6}{12} = 0{,}5\,\%$
- El tipo efectivo (TAE) será $i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = (1{,}005)^{12} - 1 = 0{,}06167 \simeq 6{,}167\,\%$

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo

Dada una operación financiera en la que se capitaliza al 0.50 % mensual, se pide determinar el tipo de interés equivalente.

- El TAE será $i = (1 + i_m)^m - 1 = (1{,}005)^{12} - 1 = 0{,}06167 \simeq 6{,}17\,\%$
- El TIN será $j_m = m \cdot i_m$ con $m = 12$, por lo tanto $j_{12} = 12 \cdot 0{,}005 = 0{,}06 \Rightarrow 6{,}00\,\%$

Se verifica que:

- $j_m < i \Rightarrow 6{,}00 < 6{,}17$
- $i_m < \frac{i}{m} \Rightarrow 0{,}05 < \frac{6{,}17}{12} = 0{,}05139$

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejemplo

Dada una operación financiera en la que se capitaliza al 6.00 % anual, se pide determinar el tipo equivalente mensual (i_{12})

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \Rightarrow i_{12} = (1+0{,}06)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}0486 \simeq 4{,}86\,\%$$

Tipos de interés equivalentes - importancia de la frecuencia m - Ejercicio

Dado un tipo de interés nominal (TIN) del 6 % anual, obtener el tipo de interés anual equivalente (TAE) y el tipo de interés de frecuencia m para las frecuencias siguientes: Semestral, Trimestral, Bimestral y Mensual.

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - importancia de la frecuencia m

- Se observa que el valor del TAE aumenta con la frecuencia. Dado un TIN del 6 %, es preferible para un contratante de un depósito, que dicho tipo sea mensual a que sea semestral.
- El motivo es que como en capitalización compuesta los intereses se acumulan para generar nuevos intereses, cuanto antes se obtengan los intereses, antes generan nuevos intereses. Si el tipo es mensual, al finalizar el primer mes ya se generan intereses, que a su vez siguen generando mas intereses. Si el tipo es semestral, hasta que no pasen 6 meses (un semestre) no se generan nuevos intereses.

Tipos de interés equivalentes - Ejercicio

Un capital de 100 euros se coloca durante 9 meses en capitalización compuesta a un tipo nominal de frecuencia mensual del 6 %. Obtener la cuantía de los intereses utilizando como unidad de medida:

- El año
- El trimestre
- El mes

CARDENAL CISNEROS

Tipos de interés equivalentes - Ejercicio

- Si se toma como unidad de medida el año, se necesita el tiempo en años y el tipo de interes anual. Como la duración son 9 meses, entonces $t = \frac{9}{12}$. Con $i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$, para obtener el tipo de interés anual se aplica la relación de la capitalización compuesta $i = (1 + i_{12})^{12} - 1 = (1{,}005)^{12} - 1 = 1{,}0617$. Por último:

$$M = 100(1 + 0{,}0617)^{\frac{9}{12}} = 104{,}59$$

- Si se toma como unidad de medida el trimestre, se necesita el tiempo en trimestres y el tipo de interes trimestral. Como la duración son 9 meses, entonces $t = \frac{9}{3} = 3$ trimestres. Con $i = 0{,}0617$, para obtener el tipo de interés trimestral se aplica la relación de la capitalización compuesta $i_4 = (1 + i)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1{,}0617)^{0{,}25} - 1 = 1{,}0151$. Por último:

$$M = 100(1 + 0{,}0151)^3 = 104{,}59$$

CARDENAL CISNEROS

- Si se toma como unidad de medida el mes, el tiempo ya lo tenemos en meses (9) tal y como se puede ver en el enunciado. Ademas, como hemos visto antes, el tipo de interes mensual se obtiene a partir del nominal mensual: $i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$. Por último:

$$M = 100(1 + 0{,}005)^9 = 104{,}59$$

CARDENAL CISNEROS

Leyes de Capitalización - Propiedad de escindibilidad

- Una operacion cumple la propiedad de escindibilidad, si el capital C que se obtiene al realizar un imposicion de importe C_0 durante t años, es el mismo que, si al cabo de h años $(h < t)$, se realizara otra operacion financiera con el capital acumulado C^* al mismo tipo de interes y con capitalizacion compuesta.

$$C = C_0(1+i)^h C_0(1+i)^{(t-h)} = C_0(1+i)^t$$

- Esta propiedad solo es válida para periodos completos en la capitalización compuesta. No se cumple para periodos incompletos, dado que en el momento de la escisión aparecerían intereses que, reinvertidos, generarian intereses adicionales. El motivo de no poder aplicar la escindibilidad en periodos rotos o anualmente incommpletos es debido a que en dichos periodos se aplica la capitalización simple y la capitalización simple no verifica la propiedad de escindibilidad.

Leyes de Capitalización - Propiedad de escindibilidad - Ejemplo

Se realiza una imposición de 10000 €durante 10 años al 7.00 % en una entidad financiera. A los cinco años y medio se cancela dicho depósito y se invierte al mismo tipo de interés en otro activo con menor nivel de riesgo. Realizar un análisis de la operación comparandola con el caso de de no haber cancelado el deposito a los cinco años y medio.

- Si no se escinde, el valor final del capital será $C = 10000(1+0{,}07)^{10} = 19671{,}51$
- Si la operación se escinde, al final de los 5.5 años se obtiene, con $C_5 = 10000(1+0{,}07)^5 = 14025{,}52$, que (en periodos menores a un año se utiliza la ley de capitalización simple):

$$C_{5,5} = C_5\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right) = 10000(1+0{,}07)^5\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right) = 14516{,}41$$

Leyes de Capitalización - Propiedad de escindibilidad - Ejemplo

- El capital al finalizar el año 6 será, tambien en capitalización simple:

$$C_6 = 14516{,}41(1 + \frac{0{,}07}{2}) = 15024{,}48$$

- Por último, el capital obtenido con excisión, al final de los 10 años es:

$$C_{10} = 15024{,}48(1 + 0{,}07)^{10-4} = 19694{,}03$$

- Por lo tanto el capital obtenido con excisión (19694.03) es mayor que sin ella (19671.51)

CARDENAL CISNEROS

Tipo de interés continuo

- Se utiliza para obtener una ley financiera en la que se cumpla siempre la propiedad de escindibilidad. Los intereses se acumulan al capital en cada instante para generar nuevos intereses.
- Como hemos visto antes, el capital equivalente depende de la frecuencia m:

$$C = C_0(1+i)^n = C_0\left(1+\left[(1+\frac{j_m}{m})^m - 1\right]\right)^n = C_0\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\cdot n}$$

- El tipo de interés continuo se obtiene haciendo tender a ∞ el numero de intervalos en los que se divide cada periodo anual.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j_m}{m}\right)^{m\cdot n} = e^{j_m\cdot m}$$

- Donde j_m es el tipo de interés continuo. Se puede comprobar que $j_m = Ln(1+i)$.

CARDENAL CISNEROS

Para comparar capitales se elige un momento del tiempo, se capitalizan ambos capitales en ese momento del tiempo y se comparan los montantes:

- Para la Ley de capitalización simple, se encuentran los capitales equivalentes en p y se igualan:

$$M_1 = M_2 \Longleftrightarrow C_1 \cdot (1 + i \cdot t_1) = C_2 \cdot (1 + i \cdot t_2)$$

- De la misma forma, para el descuento compuesto:

$$M_1 = M_2 \Longleftrightarrow C_1 \cdot (1 + i)^{t_1} = C_2 \cdot (1 + i)^{t_2}$$

CARDENAL CISNEROS

Comparación de capitales en Capitalización - Ejemplo

El 14 de Junio se han colocado treinta mil euros en capitalización simple al 12 % anual. Sabiendo que los intereses se acumulan al final del año, obtener el capital equivalente el día 2 de octubre (se utiliza el año comercial).

- Para el momento de comparación de los capitales se utiliza el momento del devengo de intereses, que en este caso es el 31 de diciembre:
- El montante del primer capital toma el valor:

$$M_1 = C_1 \cdot (1 + i \cdot t_1) = 30000 \cdot \left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{200}{360}\right) = 30000 \cdot (1{,}066) = 32000$$

- El montante del segundo capital toma el valor:

$$M_2 = C_2 \cdot (1 + i \cdot t_2) = C_2 \cdot \left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{90}{360}\right) = C_2 \cdot (1{,}03)$$

Comparación de capitales en Capitalización - Ejemplo

- Ahora que ambos capitales estan valorados en p, seran equivalentes si $M_1 = M_2$:

$$C_2 \cdot (1{,}03) = 32000 \Rightarrow C_2 = \frac{32000}{1{,}03} = 31067{,}96$$

- Nota: Del 14/12 al 31/12 hay 200 días y del 2/10 al 31/12 hay 90 días

CARDENAL CISNEROS

Comparación de capitales en Capitalización - Ejercicio

Se ha colocado un depósito de 1000 euros a un tipo nominal (anual) del 8 % semestral que vence dentro de 3 años y se acuerda hoy sustituirlo por otro que empieza dentro de un año, a un tipo nominal (anual) del 4 % trimestral que tiene vencimiento 2 años. Si para la valoración de capitales se utiliza la ley de capitalización compuesta, determinar la cuantía equivalente.

Comparación de capitales en Capitalización - Ejercicio

Se ha colocado un depósito de 1000 euros a un tipo nominal (anual) del 8 % semestral que vence dentro de 2 años y se acuerda hoy sustituirlo por otro de cuantía equivalente con vencimiento dentro de 3 años a un tipo nominal (anual) del 4 % trimestral. Si para la valoración de capitales se utiliza la ley de capitalización compuesta y la fecha de valoración es dentro de 4 años, determinar dicha cuantía equivalente (Suponga que el tipo de interés anual de esta economía es el 1 %).

Suma de Capitales en capitalización

- En el caso de la capitalización simple, el capital suma (C, t) debe cumplir:

$$C_1 \cdot (1 + i \cdot t_1) + C_2 \cdot (1 + i \cdot t_2) = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

- En el caso de la capitalización compuesta, el capital suma (C, t) debe cumplir:

$$C_1 \cdot (1 + i)^{t_1} + C_2 \cdot (1 + i)^{t_2} = C \cdot (1 + i)^{t}$$

- Lógicamente, conocidos (C_1, t_1) y (C_2, t_2) de la relación de equivalencia se desprenden dos incógnitas: C y t. Y por lo tanto, para resolver el problema se debe fijar una de ellas y encontrar la otra.
- Es importante destacar que para sumar capitales no deben ser iguales ni el tipo de interes (i), ni siquiera las leyes financieras elegidas. Lo único imprescindible es que todos los capitales estén valorados en el mismo momento.

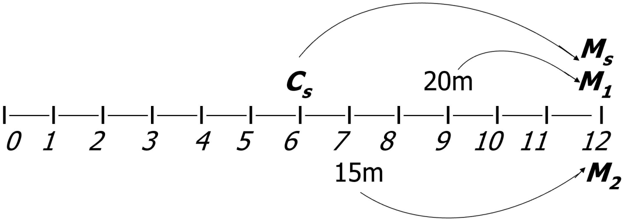
CARDENAL CISNEROS

Suma de Capitales en capitalizacion - Ejemplo

Una familia tiene dos depósitos en el banco, uno de 20000 euros que empieza dentro de 9 meses y tiene duración 3 meses y otro de 15000 euros, que empieza dentro de 7 meses y duración 5 meses. Ambos depósitos están retribuidos a un interés simple del 5 %. Si se quieren cambiar ambos por otro depósito, retribuido al mismo tipo, que empieza dentro de 6 meses y venza dentro de 6 meses. Encontrar la cuantía que resulta equivalente si se utiliza como momento de valoración un año a partir de este momento.

Suma de Capitales en capitalizacion - Ejemplo

- Para sumar los capitales se deben capitalizar hasta el momento de valoración, que es dentro de un año. El capital suma tambien se capitaliza hasta ese periodo:



- En ese momento se debe cumplir que $M_s = M_1 + M_2$

Suma de Capitales en capitalizacion - Ejemplo

- El montante del primer depósito valdrá una vez pasados los 3 meses:

$$M_1 = C_1 \cdot [1 + i \cdot (t_1)] = 20000 \cdot \left[1 + 0{,}05 \cdot \frac{3}{12}\right] = 20000 \cdot 1{,}0125 = 20250$$

- El montante del segundo depósito valdrá una vez pasados los 5 meses:

$$M_2 = C_2 \cdot [1 + i \cdot (t_2)] = 15000 \cdot \left[1 + 0{,}05 \cdot \frac{5}{12}\right] = 15000 \cdot 1{,}021 = 15312{,}5$$

- Por otro lado, el montante del depósito suma con vencimiento 6 meses valdrá en dicho momento:

$$M_S = C_S \cdot \left[1 + 0{,}05 \cdot \frac{6}{12}\right]$$

CARDENAL CISNEROS

Suma de Capitales en capitalizacion - Ejemplo

- Ahora ya tenemos todos los capitales valorados en p y se puede sumar:

$$C_S \cdot 1{,}025 = 20250 + 15312{,}5 = 35652{,}5 \Rightarrow C_S = \frac{35652{,}5}{1{,}025} = 34782{,}93$$

CARDENAL CISNEROS

Suma de Capitales en capitalizacion - Ejercicio

Una familia tiene dos depósitos en el banco, uno de 15000 euros que empieza dentro de 1 año, tiene duración 4 años y que retribuye a un tipo de interés nominal mensual del 4.5 % y otro de 10000 euros, que empieza dentro de 3 años, duración 1 año y que retribuye a un tipo de interés trimestral del 1 %. El director del banco le ofrece la posibilidad sustituir los dos depósitos y contratar un nuevo depósito de 250000, retribuido a un TAE del 5

CARDENAL CISNEROS