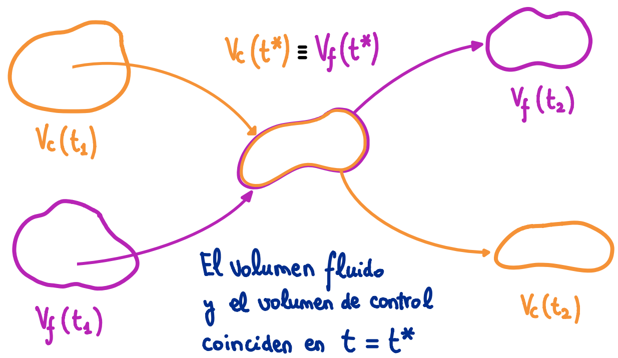
# Ecuaciones de Navier ~ Stokes

## Teorema de Transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{V_f(t)}}_{\text{Volumen fluido}} \phi \, dV = \frac{d}{dt}\underbrace{\int_{V_c(t)}}_{\text{Volumen de control}} \phi \, dV + \underbrace{\int_{\Sigma_c(t)} \phi(\vec{v}-\vec{v_c})\cdot\vec{n}\cdot dA}_{\text{Integral convectiva}}$$




En cuanto a las ecuaciones de Navier - Stokes:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho \, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho\cdot(\vec{v}-\vec{v_c})\cdot\vec{n}\cdot dA = 0}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD
(FORMA INTEGRAL)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \longleftrightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\cdot\nabla\vec{v}}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD
(FORMA DIFERENCIAL)

Derivada sustancial : $\frac{D\blacksquare}{Dt} = \frac{d\blacksquare}{dt} + \vec{v}\cdot\nabla\blacksquare$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\vec{v}\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho\cdot\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{v_c})\cdot\vec{n}\cdot dA = -\int_{\Sigma_c(t)} p\vec{n}\, dA + \int_{V_c(t)} \rho\vec{f_m}\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \overline{\overline{\tau_\mu}}\cdot\vec{n}\, dA}$$

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO
(FORMA INTEGRAL)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \rho\vec{f_m} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}}$$

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO
(FORMA DIFERENCIAL)

Tres formas de modificar la aceleración de la partícula fluida.

Como $\nabla\cdot(k\cdot A) = k\nabla\cdot A + A\nabla k$, si hacemos $k=\vec{v}$ y $A=\rho\vec{v}$:

$$\vec{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\nabla\cdot(\rho\vec{v}) + \rho\vec{v}\nabla\vec{v} = -\nabla p + \rho\vec{f_m} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}$$

$$\vec{v}\underbrace{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]}_{\substack{0 \\ \text{(Ec. continuidad)}}} + \rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\nabla\vec{v}\right] = -\nabla p + \rho\vec{f_m} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}$$

$$\rho\underbrace{\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\,\nabla\vec{v}\right]}_{\frac{D\rho}{Dt}} = -\nabla p + \rho\vec{f}_m + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}_\mu$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{f}_m + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}_\mu}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\underbrace{\vec{v}\,\nabla\vec{v}}_{\nabla\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)-\vec{v}\wedge\vec{\omega}}\right] = -\nabla p + \rho\vec{f}_m + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}_\mu$$

donde $\vec{\omega}=\nabla\wedge\vec{v}$ es el vector vorticidad

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)-\vec{v}\wedge\left(\nabla\wedge\vec{v}\right) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\vec{f}_m+\nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}_\mu}$$

Energía total por unidad de masa : $e_t = \underbrace{\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}}_{\text{Ecin macroscópica}} + \underbrace{e}_{\text{Einterna}}$

Generación de calor volumétrico
- Choques moleculares
- Absorción/Emisión fotones

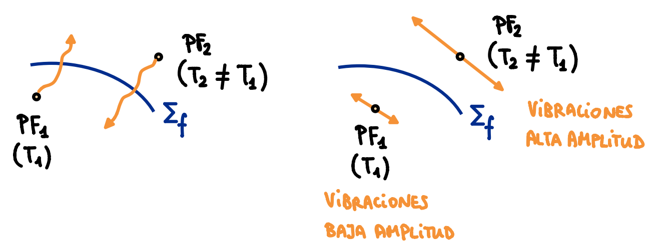
**Ecuación de la energía (forma integral)**

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)}\rho\, e_t\, dV}_{\text{Vale 0 si } V_f \text{ es aislado}} = \underbrace{-\int_{\Sigma_f(t)}(p\cdot\vec{v})\cdot\vec{n}\cdot dA + \int_{V_f(t)}\rho\vec{f}_m\, dV + \int_{\Sigma_f(t)}\left(\overline{\overline{\tau}}_\mu\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\cdot dA}_{\text{Trabajo por unidad de tiempo}} \underbrace{-\int_{\Sigma_f(t)}\vec{q}\cdot\vec{n}\cdot dA}_{\text{Cambios de Einterna}} + \int_{V_f(t)} q_v\, dV}$$

Vale 0 si $V_f$ es aislado

Trabajo por unidad de tiempo que realizan las fuerzas que actúan sobre dV (Mecanismos que pueden variar la energía)

Cambios de Einterna de partículas que entran y salen de $\Sigma_f$




**Ecuación de la energía (forma diferencial)**

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}e_t\right) = \rho\frac{De_t}{Dt} = -\nabla\cdot\left(p\vec{v}\right)+\nabla\cdot\left(\overline{\overline{\tau}}_\mu\,\vec{v}\right)+\rho\vec{f}_m\vec{v}-\nabla\cdot\vec{q}+q_v}$$

$$\overline{\overline{\tau}}_\mu = 2\mu\overline{\overline{S}} + \left(\mu_v-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)\overline{\overline{I}}, \quad \text{con} \quad S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Tensor de velocidades de deformación

$\vec{q} = -k\cdot\nabla T$ Ley de Fourier

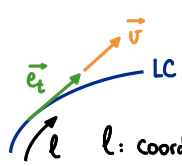
Flujo de Euler : $\mu_v=\mu=k=0$ $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{v} \\ \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{f}_m \\ \frac{Ds}{Dt} = \frac{q_v}{\rho T} \end{cases}$$

Para $q_v=0$ la partícula fluida conserva su entropía :

$$\vec{v}\cdot\nabla s = 0 \iff \frac{\partial s}{\partial l} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}\perp\nabla s\\ \vec{v}\parallel \vec{e}_t\end{array}\right. \longrightarrow \nabla s\perp\vec{e}_t \longrightarrow \nabla s\cdot\vec{e}_t = 0 \longrightarrow \frac{\partial s}{\partial l} = 0$$




$l$: coordenada línea de corriente

En líquidos $\longrightarrow$ se conserva $\underbrace{p + \rho U_m}_{\text{presión motriz}} + \underbrace{\frac{1}{2}|\vec{v}|^2}_{\text{presión dinámica}}$ a lo largo de la línea de corriente.

En gases $\longrightarrow$ se conservan
- $\vec{h} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}$ ENTALPÍA DE REMANSO
- $s$ ENTROPÍA

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(\frac{T}{T_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P_t = \rho_t R_g T_t$$

## Condiciones Iniciales y de Contorno

- **Flujo lejano** $(|\vec{x}| \to \infty)$: $\underbrace{\rho \to \rho_\infty}_{\text{No necesaria en líquidos}}$ ; $\vec{v} \to \vec{v}_\infty$ ; $T \to T_\infty$
  c.c. asintótica
  Flujo lejos de un obstáculo (condiciones no perturbadas)
- **Superficie sólida** $(\vec{x} \in \Sigma_s)$: $\underbrace{\vec{v} - \vec{v}_s = \vec{0}}_{\text{Por los efectos viscosos}}$ ; $\underbrace{T - T_s = 0}_{\text{Por conducción térmica}}$
  Podemos definir puntos concretos
- **Entrada/salida de flujo**: Condiciones compatibles con propagación de información.

## Números adimensionales

Compara el término convectivo de la ECdM con ...

- **No estacionario** → Strouhal (St)
  $$St = \frac{l_c}{v_c t_c} = \frac{t_{residencia}}{t_c}$$
- **Presiones** → Euler (Eu)
  $$Eu = 1 \quad \text{Incompresible}$$
  $$Eu = \frac{1}{\gamma M_c^2} \quad \text{si } M_c = O(1)$$
- **Fuerzas másicas** → Froude (Fr)
  $$F_r = \frac{v_c^2 / l_c}{f_{mc}}$$
- **Viscosos** → Reynolds (Re)
  $$Re = \frac{\rho l_c v_c}{\mu}$$
- **Conducción de calor** → Prandtl (Pr)
  $$P_r = \frac{\mu c}{k}$$