Tema 3

Leyes de conservación y teorema del transporte

Leyes fundamentales de conservación

Las ecuaciones de conservación de la mecánica de fluidos se obtienen aplicando a los fluidos los siguientes principios fundamentales:

- **Conservación de la masa**: la masa de un sistema cerrado se conserva.
- **Conservación de la cantidad de movimiento** o 2a ley de Newton: la variación temporal de la cantidad movimiento de un sistema cerrado es igual a la resultante de las fuerzas exteriores sobre el sistema.
- **Conservación de la energía** o 1er principio de la Termodinámica: la variación temporal en la energía total de un sistema cerrado es debida al calor aportado al sistema desde el exterior y al trabajo de las fuerzas exteriores sobre el sistema.

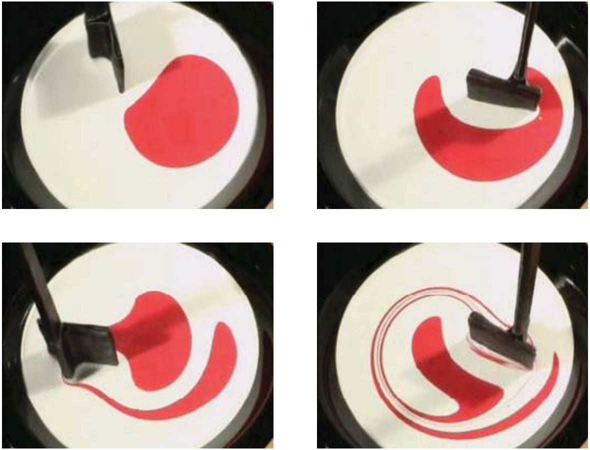
Estas leyes fundamentales están formuladas para sistemas cerrados (que no intercambian masa con el exterior).

A continuación, definimos un volumen fluido y expresamos las leyes de conservación para un volumen fluido.

Volumen fluido

Volumen fluido, $V_f(t)$: porción definida de fluido (puede ser móvil, deformable).

- Es un **sistema cerrado**.
- La superficie que delimita el volumen fluido es la superficie fluida $\Sigma_f(t)$.



Masa, cantidad de movimiento y energía

En la descripción euleriana del movimiento, las propiedades fluidas extensivas, como masa, cantidad de movimiento y energía, se definen p.u. volumen, en cada punto $\bar{x}$ y en cada instante t.

Así, si $\rho(\bar{x}, t)$ es la densidad del fluido,
$\bar{v}(\bar{x}, t)$ es la velocidad del fluido y
$e(\bar{x}, t)$ es la energía interna del fluido p.u.masa,

entonces, ρ es la masa p.u.volumen,
$\rho\bar{v}$ es la cantidad de movimiento p.u.volumen,
ρe es la energía interna p.u.volumen y
$\rho v^2/2$ es la energía cinética p.u.volumen.

La cantidad de masa, cantidad de movimiento o energía total de un volumen fluido macroscópico debe calcularse por integración:

masa: $$\int_{V_f(t)} \rho \, \mathrm{d}V$$

cantidad de movimiento: $$\int_{V_f(t)} \rho\bar{v} \, \mathrm{d}V$$

energía: $$\int_{V_f(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathrm{d}V$$

Leyes de conservación para un volumen fluido

Volumen fluido, $V_f(t)$: porción definida de fluido (puede ser móvil, deformable). Es un sistema cerrado.
Superficie fluida $\Sigma_f(t)$: superficie fluida que delimita el volumen fluido V_f.

masa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \rho \, \mathrm{d}V\right] = 0$$

cantidad de movimiento (2a ley de Newton)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \rho \bar{v} \, \mathrm{d}V\right] = \sum \bar{F}$$

$\sum \bar{F}$ representa la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el V_f

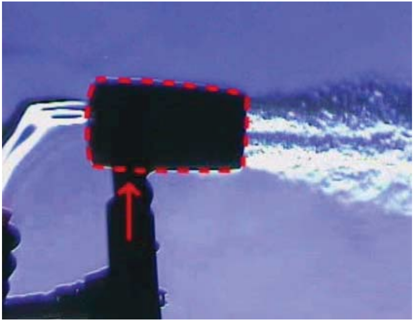
energía (1er principio de la Termodinámica)

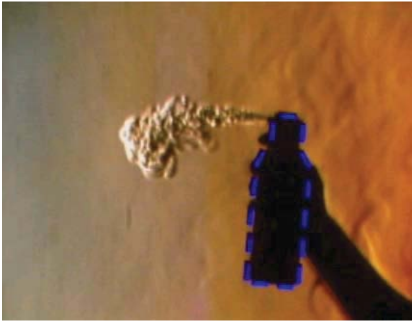
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) \mathrm{d}V\right] = \dot{W} + \dot{Q}$$

$\dot{W}$ es el trabajo p.u.tiempo realizado sobre el V_f por las fuerzas externas
$\dot{Q}$ es el calor p.u.tiempo transferido al V_f

Volumen de control, $V_c(t)$: región definida del espacio (puede ser fija, móvil, deformable) que contiene un fluido o a través de la cual fluye un fluido.

- Es un **sistema abierto**.
- La superficie que delimita el volumen de control es la superficie de control $\Sigma_c(t)$.





Volumen fluido frente a volumen de control

Volumen fluido, $V_f(t)$: porción definida de fluido (puede ser móvil, deformable).

- Es un **sistema cerrado**.
- La superficie que delimita el volumen fluido es la superficie fluida $\Sigma_f(t)$.
- Los puntos de la superficie fluida $\Sigma_f(t)$ se mueven con la velocidad del fluido $v(\bar{x}, t)$.

Volumen de control, $V_c(t)$: región definida del espacio (puede ser fija, móvil, deformable) que contiene un fluido o a través de la cual fluye un fluido.

- Es un **sistema abierto**.
- La superficie que delimita el volumen de control es la superficie de control $\Sigma_c(t)$.
- Los puntos de la superficie de control $\Sigma_c(t)$ se mueven con velocidad $v_c(\bar{x}, t)$.

Deseamos reformular las leyes de conservación para un volumen fluido (sistema cerrado) de manera que sean aplicables a un volumen de control (sistema abierto). Para ello veremos dos conceptos previos:

- flujo convectivo (que nos permitirá interpretar el teorema del transporte)
- teorema del transporte (que permite reformular las leyes de conservación en sistemas abiertos)

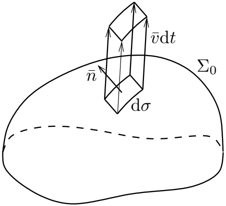
Flujo convectivo

Flujo convectivo de una magnitud fluida extensiva

Cantidad de magnitud fluida que atraviesa una superficie en la unidad de tiempo debido al movimiento medio del fluido.

$\boldsymbol{\phi(\bar{x}, t)}$: cantidad de cierta magnitud fluida extensiva expresada por unidad de volumen

$\int_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{\phi} \ \mathbf{d}\boldsymbol{V}$: cantidad de magnitud fluida que existe en un cierto instante en el volumen $\boldsymbol{V}$



$\boldsymbol{\Sigma_0}$: superficie fija arbitraria

$\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$: elemento diferencial de superficie, de orientación $\boldsymbol{\bar{n}}$

$(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}) \ \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{d}\boldsymbol{t}$: volumen de fluido que atraviesa en el tiempo $\mathbf{d}\boldsymbol{t}$ la superficie $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ (volumen del paralelepípedo de la figura)

$\boldsymbol{\phi} \ (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}) \ \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \ \mathbf{d}\boldsymbol{t}$: cantidad de magnitud fluida $\boldsymbol{\phi}$ que cruza la superficie $\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$ con el fluido en el tiempo $\mathbf{d}\boldsymbol{t}$

La cantidad de magnitud fluida que cruza $\boldsymbol{\Sigma_0}$ en la unidad de tiempo vendrá dado por:

Flujo convectivo total

$$\int_{\boldsymbol{\Sigma_0}} \boldsymbol{\phi} \ (\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}) \ \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}$$

Flujo convectivo

La cantidad de magnitud fluida ϕ que cruza $\boldsymbol{\Sigma_0}$ con el fluido en la unidad de tiempo: $\int_{\boldsymbol{\Sigma_0}} \boldsymbol{\phi\ \bar{v} \cdot \bar{n}\ \mathrm{d}\sigma}$

magnitud fluida	magnitud fluida p.u.volumen, ϕ	*flujo p.u.superficie*, $\phi\bar{v}$
volumen	$\boldsymbol{\phi = 1}$	$\boldsymbol{\phi\bar{v} = \bar{v}}$: vector flujo volumétrico
masa	$\boldsymbol{\phi = \rho}$	$\boldsymbol{\phi\bar{v} = \rho\bar{v}}$: vector flujo másico
cantidad de movimiento	$\boldsymbol{\phi = \rho\bar{v}}$	$\boldsymbol{\phi\bar{v} = \rho\bar{v}\bar{v}}$: tensor flujo de c.m.
energía	$\boldsymbol{\phi = \rho\,(e + v^2/2)}$	$\boldsymbol{\phi\bar{v} = \rho\,(e + v^2/2)\ \bar{v}}$: vector flujo de energía

Flujo convectivo a través de una superficie móvil

Generalizando la expresión del flujo convectivo a una superficie móvil $\boldsymbol{\Sigma_c(t)}$ cuyos puntos se desplazan con velocidad $\boldsymbol{\bar{v}_c(\bar{x}, t)}$, el cálculo del flujo debe utilizar la velocidad del fluido relativa a la superficie $\boldsymbol{\bar{v} - \bar{v}_c}$:

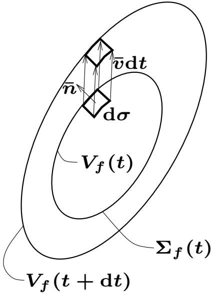
$$\int_{\boldsymbol{\Sigma_c(t)}} \boldsymbol{\phi\ [(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}]\ \mathrm{d}\sigma}$$

Teorema del Transporte de Reynolds

Objetivo

Derivación temporal de integrales extendidas a un volumen fluido (los límites de la integral y el integrando dependen del tiempo)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right]$$



$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left\{\frac{1}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t+\mathrm{d}t)} \phi(\bar{x},t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}V - \int_{V_f(t)} \phi(\bar{x},t)\mathrm{d}V\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left\{\frac{1}{\mathrm{d}t}\int_{V_f(t)} \left[\phi(\bar{x},t+\mathrm{d}t) - \phi(\bar{x},t)\right]\mathrm{d}V\right\} +$$

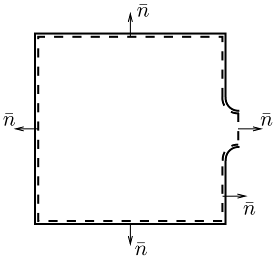
$$+ \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left\{\frac{1}{\mathrm{d}t}\int_{V_f(t+\mathrm{d}t)-V_f(t)} \phi(\bar{x},t+\mathrm{d}t)\,\underbrace{\mathrm{d}V}_{(\bar{v}\mathrm{d}t)\cdot(\bar{n}\mathrm{d}\sigma)}\right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right] = \int_{V_f(t)} \frac{\partial\phi(\bar{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Sigma_f(t)} \phi(\bar{x},t)\left[\bar{v}(\bar{x},t)\cdot\bar{n}\right]\mathrm{d}\sigma$$

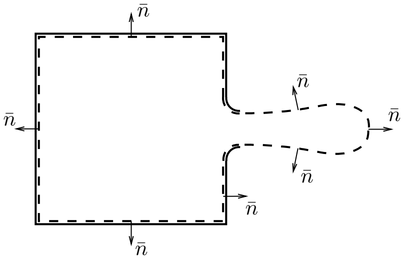
Objetivo

Relacionar la variación temporal de la cantidad de magnitud fluida que hay contenida en un volumen de control, con la variación temporal que tiene lugar en un volumen fluido que ocupa en el instante considerado el mismo lugar en el espacio.

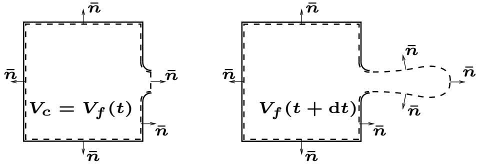
Por ejemplo, para estudiar la descarga de un depósito de gas a través de una boquilla, el volumen de control considerado debería ser un volumen de control fijo $\boldsymbol{V_c}$ que coincidiera con el interior del depósito, en cuyo caso la superficie $\boldsymbol{\Sigma_c}$ que lo limita coincidiría con la superficie interna del depósito e incluiría la superficie transversal al orificio de salida de la boquilla.
Puesto que el volumen de control es fijo, el volumen fluido $\boldsymbol{V_f(t)}$ que coincide con el volumen de control en un instante $\boldsymbol{t}$ dado deja de hacerlo en instantes posteriores, de forma que $\boldsymbol{V_f(t + \mathrm{d}t) \neq V_c}$.



$V_c = V_f(t)$



$V_f(t + \mathrm{d}t)$



Volumen de control

volumen de control $V_c(t)$: región determinada del espacio, arbitraria. Puede ser fija o variar con el tiempo.

superficie de control $\Sigma_c(t)$: superficie que limita el volumen de control $V_c(t)$, cuyos puntos se mueven con velocidad $\bar{v}_c(\bar{x}, t)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_c(t)} \phi(\bar{x}, t)\,\mathrm{d}V\right] = \int_{V_c(t)} \frac{\partial \phi(\bar{x}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Sigma_c(t)} \phi(\bar{x}, t)\,[\bar{v}_c(\bar{x}, t)\cdot \bar{n}]\,\mathrm{d}\sigma$$

Volumen fluido

volumen fluido $V_f(t)$: porción definida de fluido. Elegimos el volumen fluido que en el instante considerado coincide con el volumen de control $V_c(t)$.

superficie fluida $\Sigma_f(t)$: superficie que limita el volumen fluido $V_f(t)$, es una superficie fluida y sus puntos se mueven con la velocidad del fluido $\bar{v}(\bar{x}, t)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \phi(\bar{x}, t)\,\mathrm{d}V\right] = \int_{V_f(t)} \frac{\partial \phi(\bar{x}, t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Sigma_f(t)} \phi(\bar{x}, t)\,[\bar{v}(\bar{x}, t)\cdot \bar{n}]\,\mathrm{d}\sigma$$

Teorema del Transporte de Reynolds

Volumen de control

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_c(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right] = \int_{V_c(t)} \frac{\partial \phi(\bar{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Sigma_c(t)} \phi(\bar{x},t)\,[\bar{v}_c(\bar{x},t)\cdot\bar{n}]\,\mathrm{d}\sigma$$

Volumen fluido, coincide en el instante t con el volumen de control

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right] = \int_{V_f(t)} \frac{\partial \phi(\bar{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Sigma_f(t)} \phi(\bar{x},t)\,[\bar{v}(\bar{x},t)\cdot\bar{n}]\,\mathrm{d}\sigma$$

Teorema del Transporte de Reynolds

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right] = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_c(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right]}_{\text{variación temporal en el v.c.}} + \underbrace{\int_{\Sigma_c(t)} \phi(\bar{x},t)\,[(\bar{v}-\bar{v}_c)\cdot\bar{n}]\,\mathrm{d}\sigma}_{\text{flujo convectivo a través de la s.c.}}$$

o también

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{V_f(t)} \phi(\bar{x},t)\,\mathrm{d}V\right] = \int_{V_c(t)} \frac{\partial \phi(\bar{x},t)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\Sigma_c(t)} \phi(\bar{x},t)\,(\bar{v}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma$$