6 ORTOGONALIDAD

6.1 PROYECCIONES

<u>def</u> : $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ es una proyección si $P^2 = P$

<u>ejemplo</u> : $(m=2)$ $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>observación</u> : sea P una proyección

P es invertible $\iff P = I$ (identidad)

porque: si $\exists P^{-1} \Rightarrow P = P^{-1}PP = P^{-1}P = I$

<u>lema</u> : sea P una proyección

i. $v \in \mathrm{Ran}(P) \iff Pv = v$

$\mathrm{Ran}(P) = \{ v \in \mathbb{C}^m : \exists x \in \mathbb{C}^m \text{ t.q. } v = Px \}$

ii. sea $P^c = I - P$

- P^c es una proyección
- $\mathrm{Ran}(P^c) = \mathrm{Ker}\, P$

<u>demostración</u>:

i. $v = Px \Rightarrow v = P^2x = Pv$

ii. $P^{c2} = P^cP^c = (I-P)(I-P) = I - P - P - P^2 = I - P = P^c \Rightarrow$ es proyección

$\mathrm{Ker}(P) \subset \mathrm{Ran}(P^c)$: sea $x \in \mathrm{Ker}(P)$

$Px = 0 \Rightarrow P^cx = (I-P)x = x \underset{\text{por i.}}{\Rightarrow} x \in \mathrm{Ran}(P^c)$

$\mathrm{Ran}(P^c) \subset \mathrm{Ker}(P)$: sea $v \in \mathrm{Ran}(P^c)$

$v = P^cx = (I-P)x \Rightarrow Pv = P(I-P)x = 0$

$\Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(P)$

#

proposición: son equivalentes

I. S_1, S_2 subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^n$

t.q. $\begin{cases} S_1 \cap S_2 = \{0\} \\ S_1 + S_2 = \mathbb{C}^n \end{cases}$

$S_1 + S_2 = \{ v \in \mathbb{C}^n : v = v_1 + v_2 \ , \ v_1 \in S_1 \ , \ v_2 \in S_2 \}$

II. P proyección t.q. $S_1 = \mathrm{Ran}(P)$, $S_2 = \mathrm{Ker}(P)$

demostración:

I. $\Rightarrow$ II. : construcción de una proyección P con $\mathrm{Ran}(P) = S_1$ y $\mathrm{Ker}(P) = S_2$

sea $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ base de S_1 y $\{w_k\}_{k=1}^{\ell}$ base S_2

$\Rightarrow \{v_j\}_{j=1}^{m} \cup \{w_k\}_{k=1}^{\ell}$ base $\mathbb{C}^n$

definimos $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $\begin{cases} P v_j = v_j & , j = 1..m \\ P w_k = 0 & , k = 1..\ell \end{cases}$

sea $x \in \mathbb{C}^n$, $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j + \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k w_k$

$\Rightarrow Px = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j$, $PPx = Px$ $\therefore P^2 = P$.

II. $\Rightarrow$ I. : prueba que $S_1 = \mathrm{Ran}(P)$ y $S_2 = \mathrm{Ker}(P)$ tienen las dos propiedades si $P^2 = P$

- por el lema, $\mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0\}$:
  $v \in \mathrm{Ran}(P) \Leftrightarrow Pv = v$, $v \in \mathrm{Ker}(P) \Leftrightarrow Pv = 0$
- para todo $v \in \mathbb{C}$ tenemos $v = Pv + (I - P)v$
  donde $Pv \in \mathrm{Ran}(P)$, $(I-P)v \in \mathrm{Ran}(I-P) \underset{\text{lema}}{=} \mathrm{Ker}(P)$ #

def : una proyección P se dice proyección ortogonal si

$$\mathrm{Ran}(P) \perp \mathrm{Ker}(P)$$

(en este caso $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ran}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$)

notación : suma directa ortogonal

teorema sea P una proyección

P es pr. ortogonal $\Leftrightarrow$ $P = P^*$

demostración :

$\Leftarrow$) $\quad \langle \underset{\in \mathrm{Ran}(P)}{Px} , \underset{\in \mathrm{Ker}(P)}{(I-P)x} \rangle = \langle x , \underbrace{P^*(I-P)x}_{0} \rangle = 0 \qquad : \ P^* = P, \ P^2 = P$

$\Rightarrow$) sea $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ BON de $\mathrm{Ran}(P)$

y $\{q_j\}_{j=m+1}^{n}$ BON de $\mathrm{Ker}(P)$

$\Rightarrow \{q_j\}_{j=1}^{n}$ BON de $\mathbb{C}^n$, y la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m & q_{m+1} & \cdots & q_n \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$ es UNITARIA : $Q^*Q = I$

además

$$Q^* P Q = Q^* \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m & 0 & \cdots & 0 \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right) = I_m$$

$m \times m$

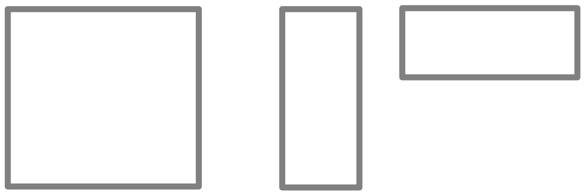
$\Rightarrow P = Q I_m Q^*$

$\Rightarrow P^* = (Q I_m Q^*)^* = Q (Q I_m)^* = P$

#

corolario: $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una proyección ortogonal $\iff \exists\, m \leq n$ $\{q_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathbb{C}^n$ ortonormales t.q.

$$P = \hat{Q}\,\hat{Q}^*, \quad \text{donde } \hat{Q} = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$



ejemplo: sea $v \in \mathbb{C}^n$, $P_v\, x = \left\langle x, \frac{v}{\|v\|_2} \right\rangle \frac{v}{\|v\|_2}$

proyección en la dirección v

$$\Rightarrow \quad P_v = \frac{1}{\|v\|_2^2} \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & v^* & - \end{pmatrix} = \frac{1}{\|v\|_2^2}\, v \otimes v$$

demostración:

- sean $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ BON de $\mathrm{Ran}(P)$
- por el teorema anterior