triangularización de Householder, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ A^{(1)} & \cdots & A^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix}}_{m} \Big\} n$$

, sea $v^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ el vector de Householder asociado a $A^{(1)}$

$$\Rightarrow \quad R_1 = \underbrace{\left(I_{n\times n} - 2\,\mathbb{P}_{v^{(1)}}\right)}_{Q_1} A = \begin{pmatrix} * & \cdot & & \\ 0 & | & \cdots & | \\ \vdots & | & & | \\ 0 & | & & | \end{pmatrix}$$

sea $v^{(2)}$ el vector de Householder asociado a la segunda columna de R_1 contada a partir del segundo elemento : $v^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\text{si} \quad Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\,0\,- \\ \hline \vdots & \\ 0 & I_{(n-1)\times(n-1)} - 2\,\mathbb{P}_{v^{(2)}} \\ \vdots & \end{array}\right) \Rightarrow \underbrace{Q_2 R_1}_{R_2} = \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \\ 0 & * & \cdot & \\ \vdots & 0 & | & \cdots & | \\ 0 & 0 & | & & | \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \left(\begin{array}{c|c} I_{2\times 2} & 0 \\ \hline 0 & I - 2\,\mathbb{P}_{v^{(3)}} \end{array}\right) \leftarrow v^{(3)} \leftarrow x \in \mathbb{R}^{n-2}$$

$$Q_3 R_2 = \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \\ 0 & * & \cdot & \\ \vdots & 0 & * & \cdots & | \\ \vdots & \vdots & 0 & & | \\ 0 & 0 & 0 & & | \end{pmatrix} = R_3 \quad \cdots$$

al paso k tenemos

$$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{(k-1)\times(k-1)} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{I - 2\,\mathbb{P}_{v^{(k)}}}_{(n-k+1)\times(n-k+1)} \end{array}\right)$$

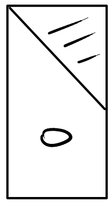
donde $v^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ es el vector de Householder asociado a la k-ésima columna del paso k-1 de la triangularización, considerado a partir del elemento diagonal

observaciones:

- este procedimiento permite obtener

$$Q_m \cdots Q_2 Q_1 A = R$$

$m = \#$ columnas de A

triangular superior : 

- $Q_j = Q_j^*$, $Q_j^{-1} = Q_j^*$: $Q_j = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I - 2P \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{A = \underbrace{Q_1 \, Q_2 \cdots Q_m}_{Q \text{ unitaria}} R \quad : \text{factorización } QR \text{ completa}}$$

- si A tiene rg max $(= m)$, entonces los elementos diagonales de R son no nulos. Pero el procedimiento de triangularización se puede llevar a cabo incluso si A no tiene rg m

↳ ejercicio: demostrar estas afirmaciones

Algoritmo: $[v^{(1)}, \dots, v^{(m)}, A] = hh(A)$

vectores de Householder $v^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k+1}$

matriz triangularizada (R)

INPUT: matriz original

for $k = 1:m$

$x = A(k:n, k)$ ← columna k a partir de la diag

$v^{(k)} = x + \text{signo}_+(x_1)\|x\| e_1$ ← $\cdot\ v^{(k)} = x$ $\cdot\ v^{(k)}(1) = v^{(k)}(1) + s_+(x_1)\|x\|$

$v^{(k)} = \dfrac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|}$

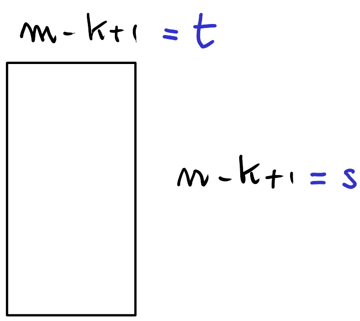
$A(k:n, k:m) = A(k:n, k:m) - 2\, v^{(k)} \otimes v^{(k)} A(k:n, k:m)$

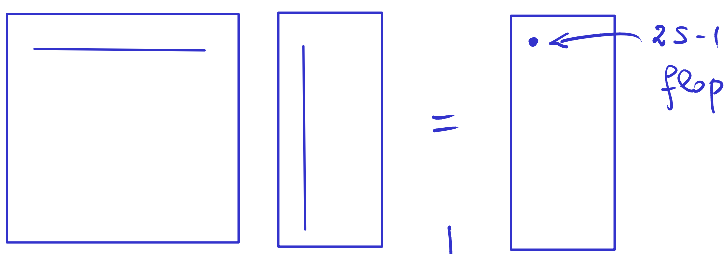
end

¿cuantos flop se están haciendo?

la operación que cuesta más en el bucle es

$$A(k:n, k:m) = A(k:n, k:m) - 2\, \underbrace{v^{(k)} \otimes v^{(k)}}_{s \times s}\ \underbrace{A(k:n, k:m)}_{s \times t}$$



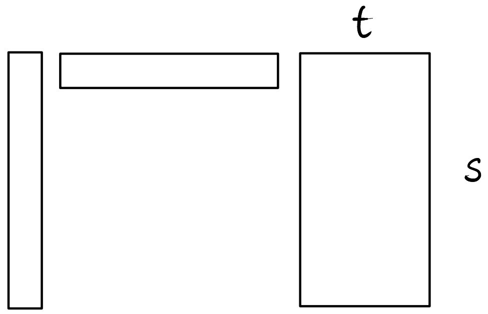


$\boxed{\text{el producto de matrices cuesta} \approx n^3}$

⚠ $(2s-1)\cdot st$ flop ?

el producto que estamos haciendo aquí tiene una forma especial: si la usamos, nos ahorramos muchas operaciones

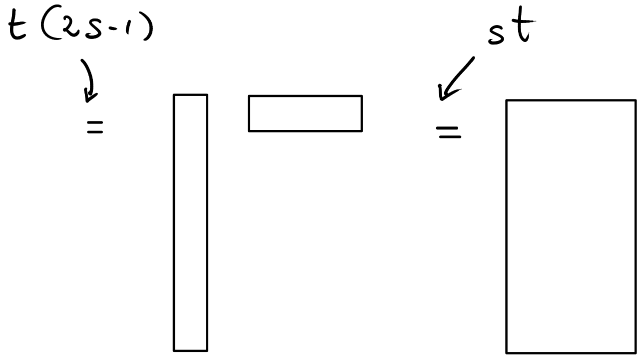
$v^{(k)} \otimes v^{(k)} A(k:n, k:m) =$



$\approx$

$3st$ operaciones

$(\ll 2s^2t)$



considerando los restos, esta operación cuesta $\approx 4st = 4(n-k+1)(m-k+1)$

$$\Rightarrow \# flop = \sum_{k=1}^{m} 4(n-k+1)(m-k+1)$$

$$\approx 2nm^2 - \frac{2}{3}m^3 = 2m^2\left(n - \frac{m}{3}\right)$$

ejercicio