Solución al Problema I

proposición: sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $rg(A) = m \leq n$

y sea $A = \hat{Q}\hat{R}$ factorización QR reducida

$\Rightarrow$ i. A^*A es invertible

ii. $\hat{Q}\hat{Q}^* = \mathbb{P}_{Ran(\hat{Q})} = \mathbb{P}_{Ran(A)}$

demostración:

i. $A^*A = \hat{R}^* \underbrace{\hat{Q}^*\hat{Q}}_{I_{m \times m}} \hat{R} = \hat{R}^*\hat{R}$ producto de matr. invertibles

ii. sea $P = \hat{Q}\hat{Q}^*$. $P^2 = P = P^* \Rightarrow P$ es proyección

- $Ran(\hat{Q}) \subset Ran(P)$: sea $v = \hat{Q}x \in Ran(\hat{Q})$

  $Pv = \hat{Q}\hat{Q}^*\hat{Q}x = \hat{Q}x = v \Rightarrow v \in Ran(P)$

- $Ran(P) \subset Ran(\hat{Q}) = (Ker(\hat{Q}^*))^\perp$

  $\hookrightarrow$ recordatorio: $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ $Ker(A^*) = (Ran(A))^\perp$ | $\langle v, Ax\rangle = \langle A^*v, x\rangle$; $\overset{\forall x}{=} 0 \Leftrightarrow v \in (Ran A)^\perp$; $\overset{\forall x}{=} 0 \Leftrightarrow v \in Ker(A^*)$

  sea $v = Pv = \hat{Q}\hat{Q}^*v \in Ran(P)$

  y sea $x \in Ker(\hat{Q}^*)$

  $\langle v, x\rangle = \langle \hat{Q}\hat{Q}^*v, x\rangle = \langle \hat{Q}^*v, \underbrace{\hat{Q}^*x}_{0}\rangle = 0$.

- $\mathbb{P}_{Ran(\hat{Q})} = \mathbb{P}_{Ran(A)}$ porque $Ran(\hat{Q}) = Ran(A)$

  factorización QR reducida

#

definición: sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $rg(A) = n \leq m$

decimos $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ PSEUDOINVERSA de A

proposición (propiedades de A^+):

I. si $A = \hat{Q}\hat{R} \Rightarrow A^+ = \hat{R}^{-1}\hat{Q}^*$

II. $A^+A = I_{n\times n}$

III. $AA^+ = \mathbb{P}_{Ran(A)}$

observaciones:

I.
- ya sabemos que A^+b es la solución de $Ax = b$ cuando existe (cuando $b \in Ran(A)$)
- A^+b se calcula, para cualquier $b \in \mathbb{C}^m$, como solución del sistema triangular
$$\hat{R}x = \hat{Q}^*b$$

II. A^+ es una INVERSA IZQUIERDA y coincide con A^{-1} si $m = n$

demostración:

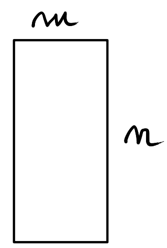
I. $$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = (\hat{R}^*\hat{R})^{-1}\hat{R}^*\hat{Q}^*$$
$$= \hat{R}^{-1}(\hat{R}^*)^{-1}\hat{R}^*\hat{Q}^* = \hat{R}^{-1}\hat{Q}^*$$

II. no hay nada que demostrar

III. $$AA^+ = \underbrace{\hat{Q}\hat{R}}_{A}\underbrace{\hat{R}^{-1}\hat{Q}^*}_{A^+} = \hat{Q}\hat{Q}^* = \mathbb{P}_{Ran(A)}$$ #

proposición anterior

teorema: sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $rg(A) = m \le n$



$\Rightarrow \forall\, b \in \mathbb{C}^n \;\exists!\; x_b \in \mathbb{C}^m$ t.q.

$$\|Ax_b - b\|_2 \le \|Ax - b\|_2 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^m$$

y es dado por $x_b = A^+ b$.

demostración:

- recordar que si $m = n \Rightarrow A^+ = A^{-1}$ y $A^{-1}b$ es la única solución de $Ax = b$. también, si $m < n$ y $b \in Ran(A)$ $\Rightarrow A^+ b$ es la única solución de $Ax = b$.

- sea $v \in \mathbb{C}^m$ cualquiera, y sea $x_b = A^+ b$

  ↳ todo $x \in \mathbb{C}^m$ se escribe $x = x_b + v$

$$\|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b\rangle = \langle (Ax_b - b) + Av, (Ax_b - b) + Av\rangle$$

$$= \|Ax_b - b\|_2^2 + \|Av\|_2^2 + \langle Ax_b - b, Av\rangle + \langle Av, Ax_b - b\rangle$$

$$\langle Ax_b - b, Av\rangle = \langle A^*(Ax_b - b), v\rangle$$

$$A^*(Ax_b - b) = A^*AA^+b - A^*b = A^*A(A^*A)^{-1}A^*b - A^*b = 0$$

$$\Rightarrow \|Ax - b\|_2^2 = \|Ax_b - b\|_2^2 + \|Av\|_2^2$$

- $\|Ax - b\|_2 \geq \|Ax_b - b\|_2 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^m$

  $\Rightarrow x_b$ es punto de mínimo de $f(x) = \|Ax - b\|_2$

- $\|Ax - b\|_2 = \|Ax_b - b\|_2 \iff \|Av\|_2 = 0$

  $\iff Av = 0 \iff v \in Ker(A) = \{0\} \iff v = 0$

  $\iff x = x_b$: unicidad.

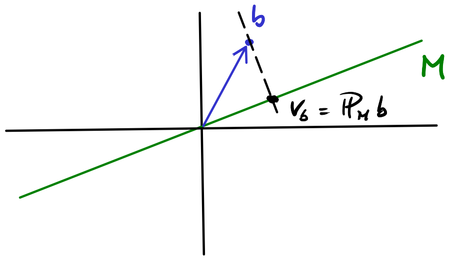
#

corolario: sea $b \in \mathbb{C}^n$, $M \subset \mathbb{C}^n$ subespacio vectorial

$\Rightarrow \exists!\ v_b \in M$ t.q. $\|v_b - b\|_2 \leq \|v - b\|_2 \quad \forall v \in M$

y es dado por $v_b = \mathbb{P}_M b$.

ejemplo en $\mathbb{R}^2$:



demostración:

- sea $\{A^{(j)}\}_{j=1}^{m}$ una base de M, $A^{(j)} \in \mathbb{C}^n$ $j \in \{1..m\}$

  ↪ todo $v \in M$ es una combinación lineal

$$V = \sum_{j=1}^{m} x_j A^{(j)} = Ax, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} | & & | \\ A^{(1)} & \cdots & A^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

- a partir de la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ sabemos que $v_b = Ax_b$

  y $Ax_b = AA^+ b = \mathbb{P}_{Ran(A)} b = \mathbb{P}_M b$ #