11 Funciones de dos variables

11.1 Introducción a las funciones de varias variables

Hasta ahora, sólo se han visto funciones de una sola variable (independiente). Sin embargo, muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza ($W = F \cdot d$) y el volumen de un cilindro circular recto ($V = \pi r^2 h$) son funciones de dos variables. La notación para una función de dos o más variables es similar a la utilizada para una función de una sola variable. Aquí se presentan dos ejemplos.

$$z = f(x, y) = x^2 + xy$$
$$w = f(x, y, z) = x + 3y - 2z$$

Definición 1

Función de dos variables

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x e y**. El conjunto D es el **dominio** de f, y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f.

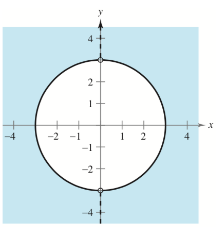
En la función dada por $z = f(x, y)$, x e y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

Como ocurre con las funciones de una variable, la manera más común para describir una función de varias variables es por medio de una ecuación, y a menos que se diga explícitamente lo contrario, se puede suponer que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación está definida. Por ejemplo, el dominio de la función dada por:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Se supone que es todo el plano xy.

Ejemplo 1.



Hallar el dominio de la función

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$

Solución

La función f está definida para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq 0$ y

$$x^2 + y^2 \geq 9$$

Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los puntos que están en la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 9$$

o en su exterior, con *excepción* de los puntos en el eje y

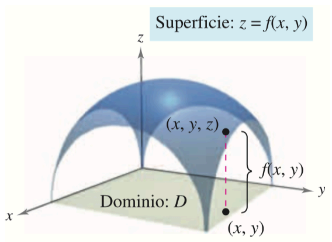
Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se llama una **función polinómica** de dos variables. Por ejemplo, la función dadas por:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2$$

es una función polinómica de dos variables. Una **función racional** es el cociente de dos funciones polinómicas. Terminología similar se utiliza para las funciones de más de dos variables.

11.1.1 Gráfica de una función de dos variables

Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función *f* de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de *f*. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una **superficie en el espacio**.

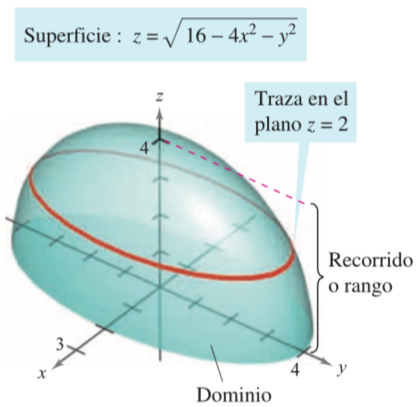


En la figura hay que observar que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D, el dominio de *f*. A cada punto (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de la superficie y, viceversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) en D

Ejemplo 2. **Descripción gráfica de una función de dos variables**

¿Cuál es el recorrido de la función $z = f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$?. Describir la gráfica de f

Solución



El dominio D dado por la ecuación de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$. Por tanto, D es el conjunto de todos los puntos que pertenecen o son interiores a la elipse dada por:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

El recorrido o rango de f está formado por todos los valores $z = f(x, y)$ tales que $0 \leq z \leq \sqrt{16}$, o sea,

$0 \leq z \leq 4$

Un punto (x, y, z) está en la gráfica de f si y solo si:

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \Longrightarrow z^2 = 16 - 4x^2 - y^2 \Longrightarrow$$

$$16 = 4x^2 + y^2 + z^2 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \;\; 0 \leq z \leq 4$$

La gráfica de f es la mitad superior de un elipsoide.

Para dibujar a mano una superficie en el espacio, es útil emplear las trazas en planos paralelos a los planos coordenados. Por ejemplo, para hallar la traza de la superficie del ejemplo anterior, con el plano $z = 2$, se sustituye $z = 2$ en la ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ y se obtiene:

$$2 = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \Longrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$$

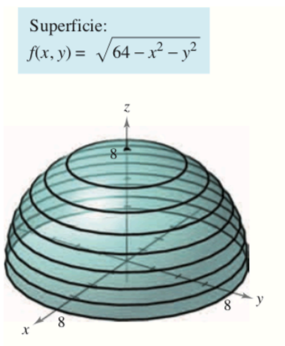
Por tanto, la traza es una elipse centrada en el punto $(0, 0, 2)$ con ejes mayor y menor de longitudes $4\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$.

11.1.2 Curvas de nivel

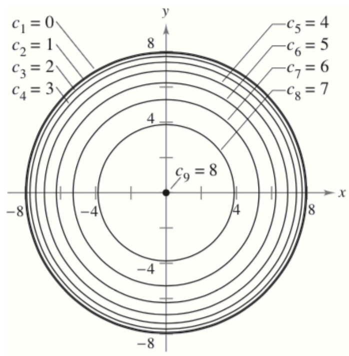
Una segunda manera de representar una función de dos variables es usar un **campo escalar** en el que el escalar $z = f(x, y)$ se asigna al punto (x, y). Un campo escalar puede caracterizarse por sus **curvas de nivel** (o **líneas de contorno**) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante.

Ejemplos de ello son los mapas del tiempo en los que se representan las isobaras o líneas de igual presión.

Un **mapa de contorno** representa la variación de z respecto a x e y mediante espacio entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel indica que z cambia lentamente, mientras que un espacio pequeño indica un cambio rápido en z. Además, en un mapa de contorno, es importante elegir valores de *c uniformemente espaciados*, para dar una mejor ilusión tridimensional.



Hemisferio



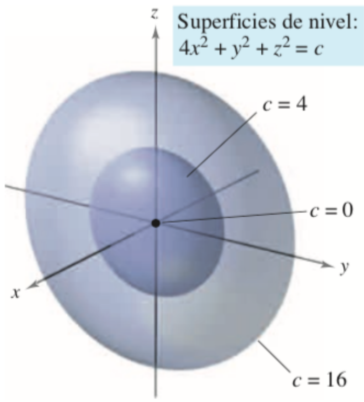
Mapa de contorno

11.1.3 Superficies de nivel

El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una superficie de nivel de la función f.

Ejemplo 3. Describir las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$

Solución



Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma:

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c$$

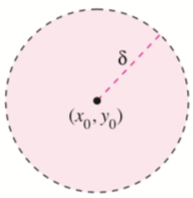
Por tanto, las superficies de nivel son elipsoides (cuyas secciones transversales paralelas al plano yz son círculos). A medida que c aumenta, los radios de las secciones transversales circulares aumentan según la raíz cuadrada de c. Por ejemplo, las superficies de nivel correspondientes a los valores $c = 0, c = 4$ y $c = 16$ son:

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (un\ solo\ punto)$$
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad (elipsoide)$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1 \quad (elipsoide)$$

Si la función del Ejemplo 3 representara la *temperatura* en el punto (x, y, z), las superficies de nivel se llamarían superficies isotermas**.**

11.2 Límites y continuidad

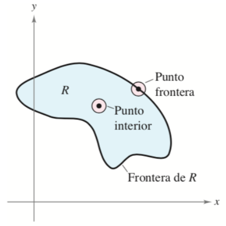
11.2.1 Entornos en el plano



El estudio del límite de una función de dos variables comienza definiendo el análogo bidimensional de un intervalo en la recta real. Utilizando la fórmula para la distancia entre dos puntos (x, y) y (x_0, y_0) en el plano, se puede definir el **entorno** $\boldsymbol{\delta}$ de (x_0, y_0) como el **disco** con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0):

$$\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \text{(disco abierto)}$$

Cuando esta fórmula contiene el signo de desigualdad *menor que*, $<$, al disco se le llama **abierto**, y cuando contiene el signo de desigualdad *menor o igual que*, $\leq$, al disco se le llama **cerrado**. Esto corresponde al uso del $<$ y del $\leq$ al definir intervalos abiertos y cerrados.



Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un **punto interior** de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) que esté contenido completamente en R, como se muestra en la figura. Si todo punto de R es un punto interior, entonces R es una **región abierta**. Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R. Por definición, una región debe contener sus puntos interiores, pero no necesita contener sus puntos frontera. Si una región contiene todos sus puntos frontera, la región es **cerrada**. Una región que contiene algunos, pero no todos sus puntos frontera no es ni abierta ni cerrada.

11.2.2 Límite de una función de dos variables

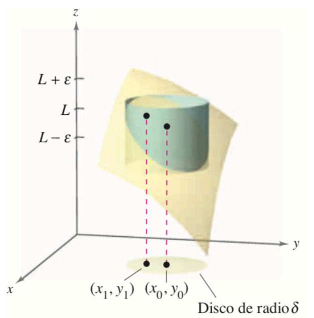
Definición 2

Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$



Gráficamente, esta definición del límite implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, en el disco de radio δ ,el valor $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, como se muestra en la figura.

La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una sola variable, pero existe una diferencia importante. Para determinar si una función en una sola variable tiene límite, sólo se necesita ver que se aproxime al límite por ambas direcciones: por la derecha y por la izquierda. Si la función se aproxima al mismo límite por la derecha y por la izquierda, se puede concluir que el límite existe. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la expresión:

$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$

Significa que el punto (x, y) puede aproximarse al punto (x_0, y_0) por cualquier dirección. Si el valor de

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

no es el mismo al aproximarse por cualquier dirección, trayectoria o **camino** a (x_0, y_0), el límite no existe.

Ejemplo 4. Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$$

Solución

Usando las propiedades de los límites de productos y sumas se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} 5x^2y = 5\cdot 1^2\cdot 2 = 10$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+y^2 = 1^1+2^2 = 5$$

Por tanto, como el límite del cociente es el cociente de los límites, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{10}{5} = 2$$

Ejemplo 5. Verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Solución

Primero hay que observar que:

$$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad y \qquad \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Entonces, en un entorno δ de $(0,0)$, se tiene $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, lo que, para $(x,y) \neq (0,0)$, implica:

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| = 5|y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \leq 5|y| \leq 5\sqrt{x^2+y^2} < 5\delta$$

Por tanto, se puede elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ y concluir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Con algunas funciones es fácil reconocer que el límite no existe. Por ejemplo, está claro que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$$

no existe porque el valor de $f(x,y)$ crece sin tope cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ a lo largo de *cualquier* trayectoria. Con otras funciones no es tan fácil reconocer que un límite no existe como sucede en el próximo ejemplo

Ejemplo 6. Mostrar que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$$

Solución

El dominio de la función

$$(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Consta de todos los puntos del plano xy menos el $(0,0)$.

Para mostrar que el límite no existe consideremos aproximaciones a $(0,0)$ a lo largo de trayectorias diferentes.

A lo largo del eje x, todo punto es de la forma $(x,0)$, y el límite a lo largo de esa trayectoria es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}\right)^2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1^2 = 1$$

Sin embargo, si (x,y) se aproxima a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y=x$, se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\right)^2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{0}{2x^2}\right) = 0$$

Esto significa que en cualquier disco abierto centrado en $(0,0)$ existen puntos (x,y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que f toma el valor 0.

11.2.3 Continuidad de una función de dos variables

Definición 3

Continuidad de una función de dos variables

Una función f de dos variables es **continua en un punto** (x_0,y_0) de una región abierta R si $f(x_0,y_0)$ es igual al límite de $f(x,y)$cuando$(x,y)\to(x_0,y_0)$. Es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

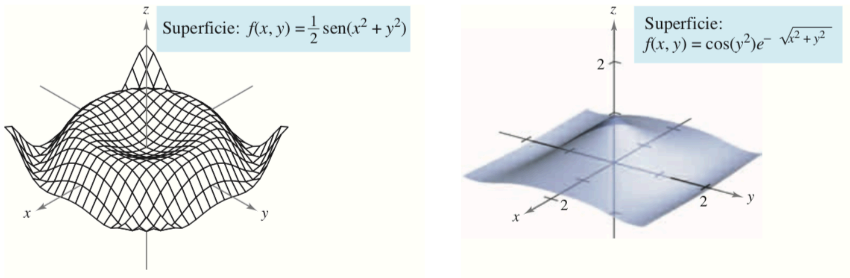
La función f es **continua en la región abierta *R*** si es continua en todo punto de R.

Teorema 1

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0,y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0,y_0).

1. Múltiplo escalar: kf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: $f \cdot g$
4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

El Teorema 1 establece la continuidad de las funciones *polinómicas* y *racionales* en todo punto de su dominio. La continuidad de otros tipos de funciones puede extenderse de manera natural de una a dos variables. Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras son continuas en todo punto del plano.



Teorema 2

Continuidad de una función compuesta

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0). Es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

Nótese que h es una función de dos variables mientras que g es una función de una variable.

Ejemplo 7. Analizar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$$

Solución

Como una función racional es continua en todo punto de su dominio, se puede concluir que f es continua en todo punto del plano xy excepto en $(0, 0)$

11.3 Derivadas parciales

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿"Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes"? Se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado.

Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o la razón de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación**

parcial y el resultado se llama **derivada parcial** de f con respecto a la variable independiente elegida.

Definición 4

Derivadas parciales de una función de dos variables

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x e y son las funciones f_x y f_y definidas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x *se considera y constante* y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y, *se considera x constante* y se deriva con respecto a y.

Ejemplo 8. Hallar las derivadas parciales f_x y f_y de la función:

$$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2xy^2 + 6x^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 2x^3$$

Ejemplo 9. Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$, hallar f_x, f_y y evaluar cada una en el punto $(1, \ln 2)$

Solución

$$f_x(x, y) = e^{x^2y} + 2x^2ye^{x^2y} = e^{x^2y}(1 + 2x^2y)$$

$$f_x(1, \ln 2) = e^{\ln 2}(1 + 2\ln 2) = 2(1 + 2\ln 2)$$

$$f_y(x, y) = x^3e^{x^2y}$$

$$f_y(1, \ln 2) = 1^3e^{1^2 \ln 2} = 2$$

Las derivadas parciales de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$, entonces $z = f(x, y_0)$, representan la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura.

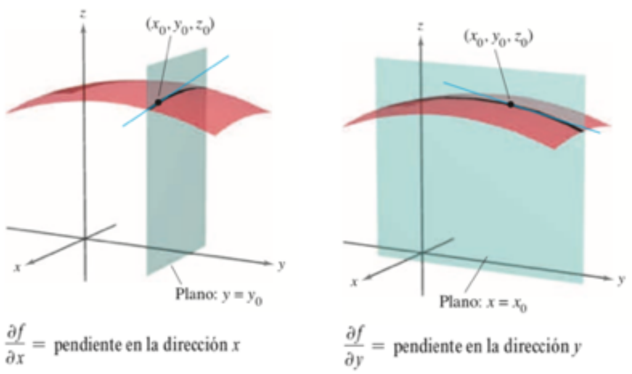


Figura 11-1

Por consiguiente,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Tanto la curva como la recta tangente se encuentran en el plano $y = y_0$.

Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de la curva dada por la intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como se muestra en la Figura 11-1.

Informalmente, los valores $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de x e y**, respectivamente.

Ejemplo 10. Hallar las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por:

$$z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Por tanto en la dirección de x, la pendiente es:

$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}$$

Y en la dirección de y, la pendiente es:

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2$$

11.3.1 Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias, es posible hallar las segundas, terceras, etc., derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan. Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

Las dos últimas se denominan **derivadas parciales cruzadas (mixtas)**

Ejemplo 11. Hallar las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$. Determinar le valor de $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución

Hallamos las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2$$
$$f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Derivamos cada una de ellas respecto a x y respecto a y:

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2$$
$$f_{yy} = 6x - 10x^2$$
$$f_{xy} = 6y + 20xy$$
$$f_{yx} = 6y + 20xy$$

En $(-1, 2)$ el valor de f_{xy} es $f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28$

Teorema 3

Si f es una función de x e y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R, entonces, para todo (x, y) en R se tiene que:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

11.4 Diferenciales

11.4.1 Diferenciales en funciones de una variable

Definición 5

Aproximación por recta tangente

Se considera una función f que es derivable en el punto $x = c$. La ecuación de la recta tangente en el punto $(c, f(c)$ está dada por:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \Longrightarrow y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

Y es llamada **aproximación por medio de una recta tangente** (o **aproximación lineal**) **de f en c.**

Como c es una constante, y es una función lineal de x. Además, restringiendo los valores de x de modo que sean suficientemente cercanos a c, los valores de y pueden utilizarse como aproximaciones (hasta cualquier precisión deseada) de los valores de la función f. En otras palabras, cuando $x \to c$, el límite de y es $f(c)$.

Cuando la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$

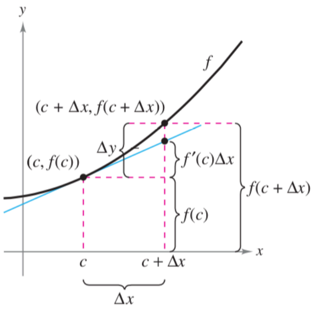


Figura 11-2

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

se usa como una aproximación de la gráfica de f, la cantidad $x - c$ recibe el nombre de cambio en x, y se denota mediante Δx, como se muestra en la Figura 11-2 . Cuando Δx es pequeña, el cambio en y (denotado por Δy) puede aproximarse como se muestra.

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x$$

Para una aproximación de este tipo, la cantidad Δx tradicionalmente se denota mediante dx, y recibe el nombre de la **diferencial de x**. La expresión $f'(x)\,dx$ se denota por dy, y se denomina la **diferencial de y**.

Definición 6

Diferenciales

Consideremos que $y = f(x)$ representa una función que es derivable en un intervalo abierto que contiene a x. La **diferencial de x** (denotada por dx) es cualquier número real distinto de cero. La **diferencial de y** (denotada por dy) es:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

En muchos tipos de aplicaciones, la diferencial de y puede utilizarse como una aproximación del cambio en y. Esto es:

$$\Delta y \approx dy \quad \text{o} \quad \Delta y \approx f'(x)dx$$

Ejemplo 12.

Comparación de Δy y dy

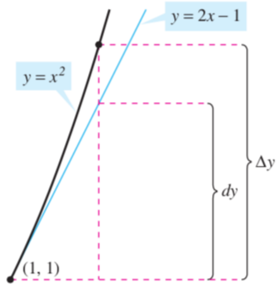
Sea $y = x^2$, determinar dy cuando $x = 1$ y $dx = 0{,}01$. Compara este valor con Δy para $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}01$

Solución

Como $y = f(x) = x^2$, se tiene que $f'(x) = 2x$ y la diferencial de y, dy, está dada por:

$$dy = f'(x)\,dx = f'(1) \cdot 0{,}01 = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$$

Ahora utilizando $\Delta x = 0{,}01$, el cambio en y es:



$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1{,}01) - f(1) = (1{,}01)^2 - 1^2 = 0{,}0201$$

La Figura 11-3 muestra la comparación geométrica de dy y Δy. Intenta comparar otros valores de dy y Δy. Verás que los valores se aproximan cada vez más entre sí cuando dx (o Δx) tiende a cero.

Figura 11-3

11.4.2 Diferenciales en dos variables

Para las funciones de dos variables se emplea una terminología similar a la vista en el apartado anterior. Dada una función $z = f(x, y)$, Δx y Δy son los incrementos en x e y , respectivamente. El incremento en z está dado por:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Definición 7

Diferencial total

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos en x e y, entonces las **diferenciales** de las variables independientes x e y son:

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y$$

Y la diferencial total de la variable dependiente z es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy$$

Ejemplo 13.

Calcular la diferencial total

Calcular la diferencial total de la función $z = 2x\,sen\,y - 3x^2y^2$

Solución

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2sen\,y - 6xy^2)\,dx + (2x\cos y - 6x^2y)\ \ dy$$

11.4.3 Diferenciabilidad

En la sección 11.4.1 se vio que si una función dada por $y = f(x)$ es *diferenciable*, se puede utilizar la diferencial $dy = f'(x)\,dx$ como una aproximación (para Δx pequeños) al valor $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es **diferenciable**. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

Definición 8

Diferenciabilidad de una función de dos variables

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse de la forma:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. La función f **es diferenciable en una región *R*** si es diferenciable en todo punto de R.

Ejemplo 14.

Mostrar que una función es diferenciable

Mostrar que la función dada por:

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

Es diferenciable en todo punto del plano

Solución

Haciendo $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) =$$

$$= 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 3 \cdot \Delta y = 2x\Delta x + 3\Delta y + \Delta x \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y =$$

$$= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y))\,\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde $\epsilon_1 = \Delta x$ y $\epsilon_2 = 0$. Como $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en cualquier punto del plano.

Debe tenerse en cuenta que el término “diferenciable” se usa de manera diferente para funciones de dos variables y para funciones de una variable. Una función de una variable es diferenciable en un punto si su derivada existe en el punto. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales f_x y f_y no garantiza que la función sea diferenciable (ver Ejemplo 16). El teorema siguiente proporciona una condición *suficiente* para la diferenciabilidad de una función de dos variables.

Teorema 4

Condiciones suficientes para la diferenciabilidad

Si f es una función de x e y, para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

11.4.4 Aproximación mediante diferenciales

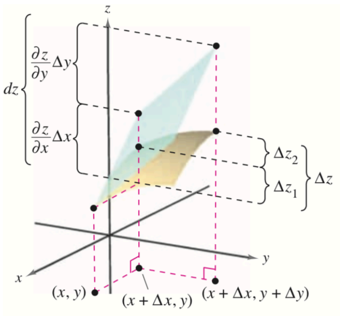


Figura 11-4

El Teorema 4 dice que se puede elegir $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ suficientemente cerca de (x, y) para hacer que $\epsilon_1\Delta x, \epsilon_2\Delta y$ sean insignificantes. Dicho de otra forma, para Δx y Δy pequeños, se puede emplear la aproximación:

$$\Delta z \approx dz$$

Recordemos que las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y.

Esto significa que:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y$$

representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, f(x, y))$. Como un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables x, y y z, la aproximación de Δz mediante dz se llama **aproximación lineal**.

Ejemplo 15. **Uso de la diferencial como una aproximación**

Utilizar la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Comparar esta aproximación con el cambio exacto en z.

Solución

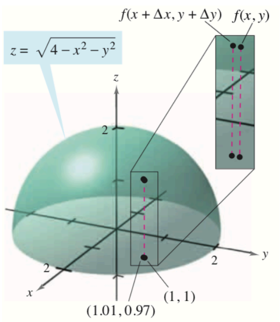


Figura 11-5

Hacemos $(x, y) = (1, 1)$ y $(x+\Delta x, y+\Delta y) = (1.01, 0.97)$ y obtenemos:

$$dx = \Delta x = 0.01 \text{ y } dy = \Delta y = -0.03.$$

Por tanto el cambio en z puede aproximarse mediante:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,\Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,\Delta y$$

Cuando $x = 1$ e $y = 1$, se tiene:

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot 0.01 \approx 0.0141$$

En la Figura 11-5 se puede ver que el cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por:

$$\Delta z = f(1.01, 0.97) - f(1,1) = \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \approx 0.0137$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él

Teorema 5

Diferenciabilidad implica continuidad

Si una función $z = f(x,y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0)

Demostración

Sea $z = f(x,y)$ diferenciable en (x_0, y_0), entonces:

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] \cdot \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2] \cdot \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Sin embrago, por definición, se sabe que Δz está dada por:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Haciendo $x = x_0 + \Delta x$ e $y = y_0 + \Delta y$, se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] \cdot \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2] \cdot \Delta y = \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2](y - y_0) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$, se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0)

Hay que recordar que la existencia de f_x y f_y no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.

Una función que no es diferenciable

Demostrar que $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0,0)$, donde f está definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

Para mostrar que f no es diferenciable en (0, 0) basta mostrar que no es continua en este punto. Para ver que f no es continua en (0, 0), se observan los valores de $f(x, y)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a (0, 0), como se muestra en la figura.

A lo largo de la recta $y = x$, el límite es:

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

Mientras que a lo largo de la recta $y = -x$ se tiene:

$$\lim_{(x,-x)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,-x)\to(0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

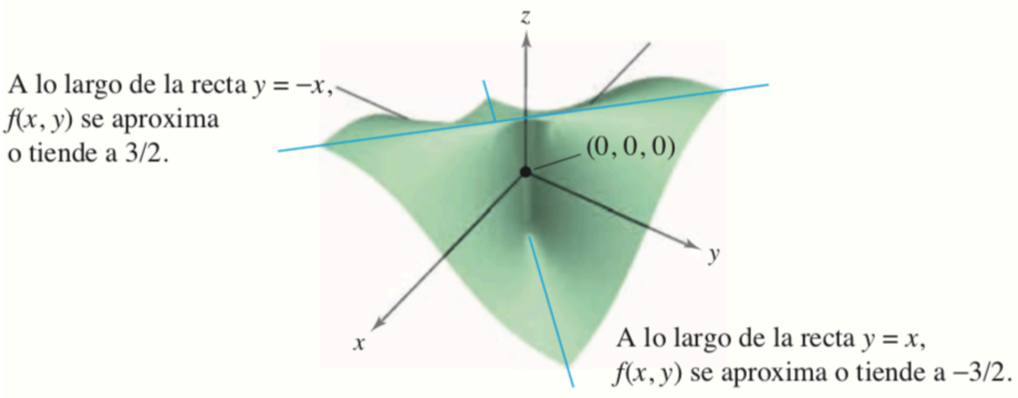
Así, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ no existe, y se puede concluir que f no es continua en (0, 0). Por tanto, de acuerdo con el Teorema 5 f no es diferenciable en (0, 0). Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales f_x y f_y, se tiene:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

y

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

Por tanto, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.



11.5 Reglas de la cadena para funciones de dos variables

11.5.1 Reglas de la cadena para funciones de dos variables

El trabajo con diferenciales de la sección anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando w es una función de x e y, donde x e y son funciones de una sola variable independiente t.

Teorema 6

Regla de la cadena: una variable independiente

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x e y. Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces w es una función diferenciable de t, y:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ejemplo 17.

Regla de la cadena con una variable independiente

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = sen\ t$ e $y = e^t$.

Hallar $\frac{dw}{dt}$ cuando $t = 0$

Solución

De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente, se tiene:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2xy \cdot \cos t + (x^2 - 2y)e^t =$$

$$= 2 \cdot sen\ t \cdot e^t \cdot \cos t + (sen^2\ t - 2e^t) \cdot e^t = 2e^t sen\ t \cos t + e^t\ sen^2\ t - 2e^{2t}$$

Cuando $t = 0$

$$\frac{dw}{dt} = -2$$

La regla de la cadena presentada en esta sección proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el Ejemplo 17, se podrían haber usado técnicas para una sola variable para encontrar dw/dt expresando primero w como función de t,

$$w = x^2y - y^2 = (sen\ t)^2 \cdot e^t - (e^t)^2 = e^t\ sen^2\ t - e^{2t}$$

y derivando después como de costumbre respecto a la variable t:

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t sen\ t \cos t + e^t\ sen^2\ t - 2e^{2t}$$

Ejemplo 18.

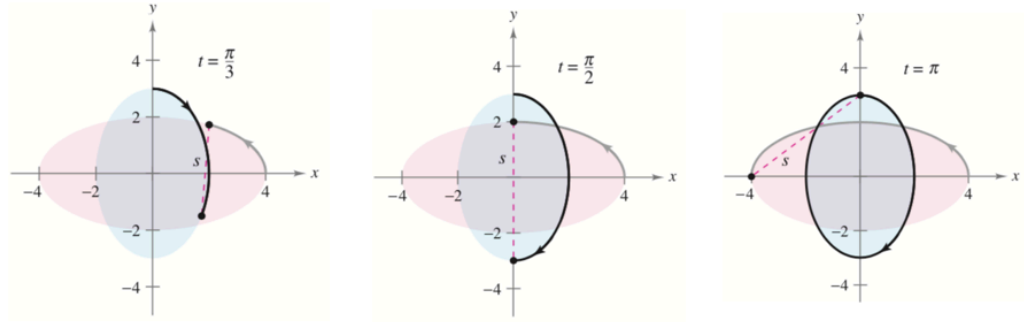
Aplicación de la regla de la cadena a velocidades o ritmos de cambio relacionados

Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes:

Primer objeto: $x_1 = 4\cos t \quad y_1 = 2\cos t$

Segundo objeto: $x_2 = 2\,\mathrm{sen}\,2t \quad y_2 = 3\cos 2t$

¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos cuando $t = \pi$?



Solución

La distancia entre dos objetos está dada por:

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

cuando $t = \pi$ se tiene, $x_1 = -4, y_1 = 0, x_2 = 0,\ \ y_2 = 3$, y:

$$s = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (3 - 0)^2} = 5$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de s son:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de x_1, y_1, x_2, y_2 son:

$$\frac{dx_1}{dt} = -4\, sen\, t = 0 \qquad \frac{dy_1}{dt} = 2\cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\, cos\, 2t = 4 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -6\,\mathrm{sen}\, 2t = 0$$

Por tanto, usando la regla de la cadena apropiada, se sabe que la distancia cambia a una velocidad o ritmo:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt} = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-2) + \frac{4}{5}\cdot 4 + \frac{3}{5}\cdot 0 = \frac{22}{5}$$

En el Ejemplo 18, obsérvese que s es función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2, y_2, cada una de las cuales es a su vez función de una sola variable t. Otro tipo de función compuesta es aquella en la que las variables intermedias son, a su vez, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x,y)$, donde $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$, se sigue que w es función de s y t, y se pueden considerar las derivadas parciales de w con respecto a s y t. Una manera de encontrar estas derivadas parciales es expresar w explícitamente como función de s y t sustituyendo las ecuaciones $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ en la ecuación $w = f(x,y)$. Así se pueden encontrar las derivadas parciales de la manera usual, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 19. **Hallar derivadas parciales por sustitución**

Hallar $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$, siendo $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ e $y = \frac{s}{t}$

Solución

Comenzamos por sustituir $x = s^2 + t^2$ e $y = \frac{s}{t}$ en la ecuación $w = 2xy$ para obtener:

$$w = 2xy = 2\cdot(s^2+t^2)\cdot\frac{s}{t} = 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right)$$

Después, para encontrar $\frac{\partial w}{\partial s}$, se mantiene t constante y se deriva respecto de s:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right) = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$

De manera similar, para hallar $\frac{\partial w}{\partial t}$, se mantiene constante s y se deriva respecto a t:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right) = 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right) = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}$$

El Teorema 7 proporciona un método alternativo para hallar las derivadas parciales del Ejemplo 19, sin expresar w explícitamente como función de s y t.

Teorema 7 **Regla de la cadena: dos variables independientes**

Sea $w = f(x,y)$, donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$, existen, entonces $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ existen y están dadas por:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Demostración

Para obtener $\frac{\partial w}{\partial s}$, se mantiene constante t y se aplica el Teorema 6 para obtener el resultado deseado. De manera similar, para obtener $\frac{\partial w}{\partial t}$ se mantiene constante s y se aplica el Teorema 6.

Ejemplo 20. **Regla de la cadena con dos variables independientes**

Utilizar el Teorema 7 para calcular $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ del Ejemplo 19

Solución

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2y \cdot 2s + 2x \cdot \frac{1}{t} = 2 \cdot \frac{s}{t} \cdot 2s + 2(s^2 + t^2) \cdot \frac{1}{t} = \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} =$$

$$= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$

De manera análoga:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2y \cdot 2t + 2x \cdot \frac{-s}{t^2} = 2 \cdot \frac{s}{t} \cdot 2t + 2(s^2 + t^2) \cdot \frac{-s}{t^2} =$$

$$= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2} = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}$$

11.5.2 Derivación o diferenciación parcial implícita

Esta sección concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Supóngase que x e y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde se supone que $y = f(x)$ es función derivable de x. Para hallar ${dy}/{dx}$, la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si se considera la función dada por:

$$w = F(x, y) = F\big(x, f(x)\big)$$

Se puede aplicar el Teorema 6 para obtener:

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}$$

Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f, se sabe que ${dw}/{dx} = 0$ y se tiene:

$$F_x(x,y)\frac{dx}{dx} + F_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora, si $F_y(x,y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que ${}^{dx}/_{dx} = 1$, para concluir que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Teorema 8

Regla de la cadena: derivación implícita

Si la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \qquad F_y(x,y) \neq 0$$

Si la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x e y, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \qquad F_z(x,y,z) \neq 0$$

Ejemplo 21.

Hallar una derivada implícitamente

Dada la ecuación $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$ calcular ${}^{dy}/_{dx}$

Solución

Se comienza por definir una función F:

$$F(x,y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4$$

Después usando el Teorema 8, se tiene:

$$F_x(x,y) = -2x \qquad \text{y} \qquad F_y(x,y) = 3y^2 + 2y - 5$$

Por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Ejemplo 22.

Hallar derivadas parciales implícitamente

Dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$

Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solución

Sea $F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$

Entonces:

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$
$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

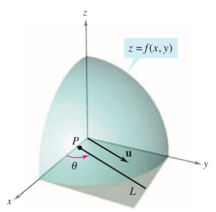
Con lo que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{-2x^2y + 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

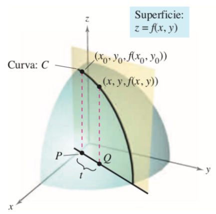
11.6 Derivadas direccionales y gradientes

11.6.1 Derivada direccional



Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de *f*, como se muestra en la figura. La "dirección" de la derivada direccional está dada por un vector unitario:

$$\boldsymbol{u} = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + sen\ \theta\, \boldsymbol{j}$$



donde θ donde es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo e $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ representa a dos vectores ortonormales (ortogonales y unitarios) en la dirección del eje x e y respectivamente.

Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a **u**, como se muestra en la figura. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C. La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de **u** se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L, representada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + t\cos\theta$$

y

$$y = y_0 + t\ sen\ \theta$$

de manera que para todo valor de t, el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L. Para cada uno de los puntos P y Q, hay un punto correspondiente en la superficie.

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \quad \text{Punto sobre } P$$

$$(x, y, f(x, y)) \qquad \text{Punto sobre } Q$$

Como la distancia entre P y Q es:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t \cos\theta)^2 + (t\, sen\, \theta)^2} = |t|$$

Se puede escribir la pendiente de la secante que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como:

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta\,, y_0 + t\, sen\,\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Por último, haciendo que $t \to 0$ se llega a la definición siguiente:

Definición 9

Derivada direccional

Sea f una función de dos variables x e y, y sea $\boldsymbol{u} = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + sen\,\theta\, \boldsymbol{j}$ un vector unitario. Entonces la derivada direccional de f en la dirección de $\boldsymbol{u}$, que se denota $D_u f$, es:

$$D_u f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta\,, y + t\, sen\,\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite. Una fórmula "de trabajo" más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y.

Teorema 9

Derivada direccional

Si f es una función diferenciable de x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u} = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + sen\,\theta\, \boldsymbol{j}$ es:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\, sen\,\theta$$

Demostración

Dado un punto fijado (x_0, y_0), sea $x = x_0 + t\cos\theta$ e $y = y_0 + t\, sen\,\theta$.

Hacemos $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena para obtener:

$$g'(t) = f_x(x, y)\, x'(t) + f_y(x, y)\, y'(t) = f_x(x, y)\ \cos\theta + f_y(x, y)\, sen\,\theta$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ e $y = y_0$, por tanto:

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\ \cos\theta + f_y(x_0, y_0)\, sen\,\theta$$

De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que:

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta\,, y_0 + t\ sen\ \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Por consiguiente, $D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\ sen\ \theta$

Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por **u**. Dos de éstas son las derivadas parciales f_x y f_y.

1. En la dirección del eje x positivo (basta hacer $\theta = 0$, con lo que obtenemos $\boldsymbol{u} = \cos 0\,\boldsymbol{i} + sen\ 0\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$.

$$D_i f(x, y) = f_x(x, y)\cos 0 + f_y(x, y)\ sen\ 0 = f_x(x, y)$$

2. En la dirección del eje y positivo (basta hacer $\theta = \frac{\pi}{2}$, con lo que obtenemos $\boldsymbol{u} = \cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} + sen\ \frac{\pi}{2}\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}$.

$$D_j f(x, y) = f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{2} + f_y(x, y)\ sen\ \frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

Ejemplo 23. **Hallar la derivada direccional**

Hallar la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$

En $(1, 2)$, en la dirección de:

$$\boldsymbol{u} = \cos\frac{\pi}{3}\ \boldsymbol{i} + \text{sen}\frac{\pi}{3}\ \boldsymbol{j}$$

Solución

Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el Teorema 9:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\ sen\ \theta = -2x\cos\theta + \left(\frac{-y}{2}\right)\ sen\ \theta$$

Haciendo $\theta = \frac{\pi}{3}, x = 1, y = 2$ se obtiene:

$$D_u f(1, 2) = -2 \cdot 1\cos\frac{\pi}{3} + \left(\frac{-2}{2}\right)\ sen\ \frac{\pi}{3} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}866$$

Nota: Se ha especificado la dirección por medio de un vector unitario **u**. Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, se debe normalizar el vector antes de aplicar el Teorema 9.

Ejemplo 24. **Hallar la derivada direccional**

Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x^2\ sen\ 2y$

En el punto $\left(1, {}^{\pi}/_{2}\right)$ en la dirección de:

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$$

Solución

Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el Teorema 9. Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + sen\,\theta\,\boldsymbol{j}$$

Mediante este vector calculamos la derivada direccional:

$$D_u f(x,y) = 2x\,sen\,2y\cos\theta + 2x^2\cos 2y\;\;sen\,\theta$$

$$D_u f\left(1, {}^{\pi}/_{2}\right) = 2\,sen\,\pi\frac{3}{5} + 2\cos\pi\left(-\frac{4}{5}\right) = 0\cdot\frac{3}{5} + (-2)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

11.6.2 Gradiente de una función de dos variables

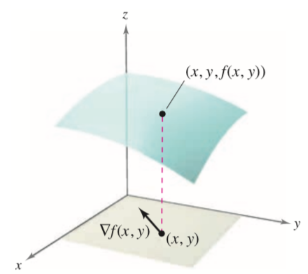
El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes.

Definición 10

Gradiente de una función de dos variables

Sea $z = f(x,y)$ una función tal que f_x y f_y existen. Entonces el gradiente de f denotado con $\nabla f(x,y)$ es el vector:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j}$$



El gradiente es un vector situado en el plano xy, no un vector en el espacio tal como se muestra en la figura.

Ejemplo 25.

Hallar el gradiente de una función en un punto

Calcular el gradiente de $f(x,y) = y\,ln\,x + xy^2$ en el punto $(1,2)$

Solución

Calculamos las derivadas parciales:

$$f_x = \frac{y}{x} + y^2 \qquad f_y = \ln x + 2xy$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\boldsymbol{i} + (\ln x + 2xy)\boldsymbol{j}$$

En el punto $(1, 2)$ el gradiente es:

$$\nabla f(1,2) = (2 + 2^2)\boldsymbol{i} + (\ln 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2)\boldsymbol{j} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

Como el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ como:

$$D_u f(x,y) = \left[f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\,\boldsymbol{j}\right] \cdot [\cos\theta\,\boldsymbol{i} + sen\,\theta\,\boldsymbol{j}]$$

En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector dirección. Este útil resultado se resume en el teorema siguiente.

Teorema 10

Forma alternativa de la derivada direccional

Si $f(x,y)$ es diferenciable, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u}$ es:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \boldsymbol{u}$$

Definición 11

Calcular una derivada direccional mediante el gradiente

Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ en el punto $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, en la dirección de $P(-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q(0, 1)$

Solución

Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el Teorema 10.
Un vector en la dirección especificada es:

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v} = \left(0 + \frac{3}{4}\right)\boldsymbol{i} + (1-0)\,\boldsymbol{j} = \frac{3}{4}\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

Y un vector unitario en esa dirección es:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{3}{5}\,\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\,\boldsymbol{j}$$

Como:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j} = 6x\,\boldsymbol{i} - 4y\,\boldsymbol{j}$$

el gradiente en $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ es:

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4},0\right)=-\frac{9}{2}\,\boldsymbol{i}+0\,\boldsymbol{j}$$

Por tanto en $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ la derivada direccional es:

$$D_u f\left(-\frac{3}{4},0\right)=\nabla f\left(-\frac{3}{4},0\right)\cdot\boldsymbol{u}=\left(-\frac{9}{2}\,\boldsymbol{i}+0\,\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\,\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\,\boldsymbol{j}\right)=-\frac{27}{10}$$

11.6.3 Aplicaciones del gradiente

Se ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto (x,y) de una superficie. En muchas aplicaciones, se desea saber en qué dirección moverse de manera que $f(x,y)$ crezca más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

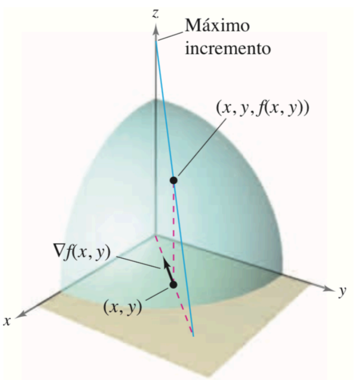
Teorema 11

Propiedades del gradiente

Sea f diferenciable en (x,y).

1. Si $\nabla f(x,y)=\boldsymbol{0}$, entonces $D_u f(x,y)=0$ para todo u
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x,y)$ y el valor máximo de $D_u f(x,y)$ es $\|\nabla f(x,y)\|$
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x,y)$ y el valor máximo de $D_u f(x,y)$ es $-\|\nabla f(x,y)\|$

Demostración



Si $\nabla f(x,y)=\boldsymbol{0}$, entonces en cualquier dirección (con cualquier $\boldsymbol{u}$) se tiene:

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= \nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{u} \\ &= (0\,\boldsymbol{i}+0\,\boldsymbol{j})\cdot(\cos\theta\,\boldsymbol{i}+sen\,\theta\,\boldsymbol{j})=0 \end{aligned}$$

Si $\nabla f(x,y)\neq\boldsymbol{0}$, sea ϕ el ángulo entre $\nabla f(x,y)$ y un vector unitario $\boldsymbol{u}$. Por las propiedades del producto escalar de vectores sabemos que:

$$D_u f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\boldsymbol{u}=D_u f(x,y)=\|\nabla f(x,y)\|\cdot\|\boldsymbol{u}\|\cdot\cos\phi=\|\nabla f(x,y)\|\cdot\cos\phi$$

y se sigue que el valor máximo de $D_u f(x,y)$ se presentará cuando $\cos\phi=1$. Por tanto $\phi=0$ y el valor máximo de la derivada direccional se obtiene cuando $\boldsymbol{u}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(x,y)$. Este valor máximo es precisamente:

$$\|\nabla f(x,y)\| \cdot \cos\phi = \|\nabla f(x,y)\|$$

De igual forma el valor de $D_u f(x,y)$ puede obtenerse haciendo $\phi = \pi$ de manera que $\boldsymbol{u}$ apunte en la dirección opuesta a $\nabla f(x,y)$.

Para observar una de las propiedades del gradiente, imaginar a un esquiador que desciende por una montaña. Si $f(x,y)$denota la altitud a la que se encuentra el esquiador, entonces $-\nabla f(x,y)$ indica la dirección de acuerdo con la brújula que debe tomar el esquiador para seguir el camino de descenso más rápido. (Recuérdese que el gradiente indica una dirección en el plano xy y no apunta hacia arriba ni hacia abajo de la ladera de la montaña.)

Otra ilustración del gradiente es la temperatura $T(x,y)$ en cualquier punto (x,y) de una placa metálica plana. En este caso, $\nabla T(x,y)$ da la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (x,y), como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 26. **Hallar la dirección de máximo incremento**

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica viene dada por:

$$T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2,-3)$ aumenta más rápidamente la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

Solución

Calculamos el gradiente de la función temperatura:

$$\nabla T(x,y) = T_x(x,y)\boldsymbol{i} + T_y(x,y)\boldsymbol{j} = -8x\,\boldsymbol{i} - 2y\,\boldsymbol{j}$$

La dirección de máximo incremento en el punto $(2,-3)$ está dada por:

$$\nabla T(2,-3) = -16\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j}$$

Y la tasa o ritmo de incremento es:

$$\|\nabla T(2,-3)\| = \sqrt{(-16)^2 + 6^2} = \sqrt{292} \approx 17,1^0\ por\ cm$$

La solución del Ejemplo 26 puede entenderse erróneamente. Aunque el gradiente apunta en la dirección de máximo incremento de la temperatura, no necesariamente apunta hacia el punto más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente proporciona una solución local para encontrar un incremento relativo de la temperatura en el punto $(2,-3)$. *Una vez que se abandona esa posición, la dirección de máximo incremento puede cambiar.*

Ejemplo 27. **Hallar la trayectoria de un rastreador térmico**

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2,-3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x,y) es:

$$T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

Hallar la trayectoria del rastreador, si éste se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.

Solución

La función de posición del rastreador tiene la forma:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

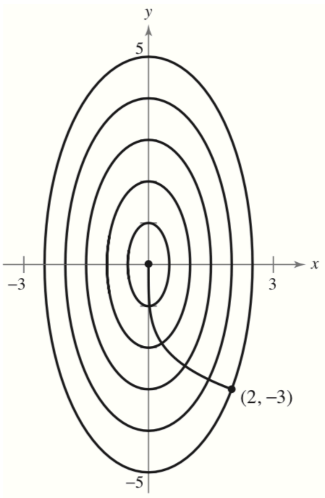


Figura 11-6

Un vector tangente en cada punto $(x(t), y(t))$ está dado por:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\,\boldsymbol{j}$$

Como el rastreador busca el máximo incremento de temperatura, las direcciones de $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\nabla T(x, y) = -8x\,\boldsymbol{i} - 2y\,\boldsymbol{j}$ son iguales en todo punto de la trayectoria. Así,

$$-8x = k\frac{dx}{dt} \qquad y \qquad -2y = k\frac{dy}{dt}$$

Donde k depende de t. Despejando en cada ecuación ${}^{dt}/_{k}$ e igualando, obtenemos:

$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y} \Longrightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = 4\int \frac{1}{y}\,dy \Longrightarrow \ln x = 4\ln y + C = \ln(C \cdot y^4) \Longrightarrow x = C\,y^4$$

Como el rastreador comienza en $(2, -3)$, podemos obtener C:

$$2 = C \cdot (-3)^4 \Longrightarrow C = \frac{2}{81}$$

Por tanto , la ecuación que determina la trayectoria del rastreador es:

$$x = \frac{2}{81}\,y^4$$

En la Figura 11-6, la trayectoria del rastreador (determinada por el gradiente en cada punto) parece ser ortogonal a cada una de las curvas de nivel. Esto resulta claro cuando se considera que la temperatura $T(x, y)$ es constante en cada una de las curvas de nivel. Así, en cualquier punto (x, y) sobre la curva, la velocidad o ritmo de cambio de T en dirección de un vector unitario tangente $\boldsymbol{u}$ es 0, y se puede escribir:

$$\nabla f(x, y) \cdot \boldsymbol{u} = T_u f(x, y) = 0$$

Puesto que el producto escalar de $\nabla f(x, y)$ y $\boldsymbol{u}$ es 0, se puede concluir que deben ser ortogonales. Este resultado se establece en el siguiente teorema.