

Matemática Discreta y Lógica Matemática
Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas
Primer parcial - Enero 2019

NOMBRE:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
 - **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
 - El examen dura **3 horas**.
 - Cada una de las seis primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,15 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será como mínimo 0, nunca negativa.
 - En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0.
-

1. El conjunto resultado de evaluar la expresión conjuntista $(\emptyset \cup \{ \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \}, \emptyset \} \}) \cap (\{ \emptyset \} \cup \{ \{ \emptyset \} \})$ es
 - ☐ \emptyset
 - ☐ $\{ \emptyset \}$
 - ☐ $\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$
 - ☐ ninguno de las anteriores
2. Sea A un conjunto con $|A| = 10$ y R una relación de equivalencia sobre A . Sean $a, b, c \in A$, con $|[a]| = 3$, $|[b]| = 5$ y $|[c]| = 1$. Entonces el número de clases de equivalencia determinadas por R es
 - ☐ 4
 - ☐ 3
 - ☐ 2
 - ☐ 5
3. La función definida por $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2; f(n) = f(n - 3)$, para $n \geq 3$, cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$
 - ☐ $f(n) = n \text{ div } 3$
 - ☐ $f(n) = n$
 - ☐ $f(n) = n \text{ mod } 3$
 - ☐ f no está bien definida
4. Si a y b son enteros positivos tales que $3a - 5b = 27$, entonces
 - ☐ el $\text{mcd}(a, b)$ **no** puede ser 27
 - ☐ el $\text{mcd}(a, b)$ **no** puede ser 13
 - ☐ el $\text{mcd}(a, b)$ **puede** ser 14
 - ☐ ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

5. La relación R definida sobre \mathbb{N} como:

$$xRy \iff (x = y) \vee (x + y \text{ es impar})$$

es

☐

relación de orden parcial

☐

relación de orden estricto

☐

no es ni relación de orden ni relación de equivalencia

☐

relación de equivalencia

6. Consideramos los tres conjuntos siguientes: $(\mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{Q} \times \{0, 1\}$.

☐

Los tres conjuntos son no numerables.

☐

El segundo es el único no numerable.

☐

El primero y el tercero son no numerables.

☐

El tercero es el único numerable.

7. (1,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_1$, definida recursivamente como sigue:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 3,$$

$$f(n) = 6 * f(n-1) - 9 * f(n-2) + 3^n \quad (n \geq 2)$$

Razonando por inducción, demuestra que $f(n) = \frac{3^n}{2}(n^2 - n + 2)$, para todo $n \geq 0$. Indica qué tipo de inducción utilizas y justifica los pasos de tu demostración, en especial **indica cuándo aplicas la hipótesis de inducción y por qué puedes aplicarla**.

8. (1 punto) Sean $a, b, c \in \mathbb{N}_1$. Demuestra que

$$c|a \wedge c|b \iff c|\text{mcd}(a, b)$$

Idea: En uno de los sentidos conviene usar el teorema de Bézout.

9. (0,5 puntos) Demuestra que **no siempre** es cierto que

$$(A \oplus B) \setminus B = B \setminus (A \oplus B)$$

(Recuerda que dados dos conjuntos C y D , $C \oplus D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$.)

10. (1,5 puntos) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

a) Define sobre él **dos** relaciones de equivalencia **distintas** que **no sean** ni la identidad $id_A = \{(a, a) / a \in A\}$, ni la relación total $A \times A$.

b) Estudia si es verdadero o falso que la unión de dos relaciones de equivalencia **siempre** sigue siendo una relación de equivalencia.

11. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 + \frac{2}{x}$. Estudia si f es inyectiva y/o suprayectiva.

12. (1,5 puntos) Sea la relación R definida sobre \mathbb{N}_1 como:

$$xRy \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 5^k \cdot x = y$$

a) Demuestra que R es una relación de orden parcial.

b) Dado $S = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50\}$, dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden parcial R restringido a S .

c) Determina los elementos extremos y extremales de R restringido a S .