I-4 Límites y continuidad de las funciones de varias variables. Propiedades

Def [Límite]:

- Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y un punto $a \in \mathbb{R}^n$ que sea punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$, decimos que el vector $b \in \mathbb{R}^m$ es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a, y lo escribimos en la forma

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si y sólo si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta(\epsilon) > 0, \text{ tal que } \forall x \in \mathcal{D}(f), \ 0 < \|x - a\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x) - b\| < \epsilon$$

- Esta definición rigurosa del límite de una función se conoce como definición "$\epsilon - \delta$".

Comentario 1: la definición de límite nos dice que el límite de la función $f(x)$ en el punto "a" es el vector "b", cuando prefijada, mediante la distancia arbitrariamente pequeña $\epsilon > 0$, una proximidad al vector límite b; es siempre posible encontrar un valor $\delta(\epsilon) > 0$, (que naturalmente depende de ϵ) tal que si x dista del punto "a", donde tomamos límite, menos que $\delta(\epsilon)$, los valores que toma la función $f(x)$ distan de "b" menos que ϵ.
O equivalentemente, cuando para cualquier bola abierta de radio ϵ, centrada en el vector límite b, $B_\epsilon(b)$, por pequeño que sea $\epsilon > 0$, siempre existe una bola abierta perforada $B'_{\delta(\epsilon)}(a)$, de radio $\delta(\epsilon)$ y centrada en el punto "a" donde tomamos límite, tal que $f(B'_{\delta(\epsilon)}(a)) \subset B_\epsilon(b)$.

Comentario 2: en la definición de límite hemos exigido que el punto "a" donde se toma límite sea un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$. Esto ha de ser así, para asegurar que las bolas perforadas centradas en el punto "a" contengan siempre puntos del dominio. Esto garantiza que la exigencia, que impone la definición de límite, de que los valores que toma la función en la vecindad de "a", se acercan al valor límite b, no es una exigencia vacía.

• Otra cuestión importante acerca de la definición de límite, es que dicha definición implica automáticamente la unicidad del límite, es decir no puede haber dos vectores diferentes b y c que sean ambos límite de la función $f(x)$ cuando $x \to a$.

Proposición [Unicidad de los límites]

El límite de una función en un punto, si existe es único, es decir

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad y \quad \lim_{x\to a} f(x) = c \Rightarrow b = c.$$

Demostración: lo demostraremos por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que existiesen dos vectores b y c, tales que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} f(x) = c$, con $b \neq c$. Entonces llamando $r = d(b,c) = \|b-c\|$, las bolas abiertas $B_{r/2}(b)$ y $B_{r/2}(c)$ satisfacen $B_{r/2}(b) \cap B_{r/2}(c) = \phi$. Ahora por ser $\lim_{x\to a} f(x) = b$, para $r/2 > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $f(B_{\delta_1}(a)) \subset B_{r/2}(b)$; y por ser $\lim_{x\to a} f(x) = c$, para $r/2 > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que $f(B_{\delta_2}(a)) \subset B_{r/2}(c)$. Entonces tomando $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ tenemos $f(B_{\delta_3}(a)) \subset B_{r/2}(b) \cap B_{r/2}(c) = \phi$, lo cual es contradictorio con que a es un punto de acumulación del dominio.

• A continuación definimos el concepto de función continua en un punto.

Def [Función continua en un punto]

Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un punto $a \in \mathcal{D}(f)$, se dice que f es continua en a si y solo si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \text{ tal que } \|x-a\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Notemos que en la definición de continuidad, escribimos $\|x-a\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$, es decir exigimos que la imagen de una bola abierta $B_{\delta(\epsilon)}(a)$ completa, incluyendo su centro, esté contenida en la bola abierta arbitraria $B_\epsilon(f(a))$ previamente fijada, o sea $f(B_{\delta(\epsilon)}(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$. Esto es ligeramente diferente de lo que exigiríamos para poder escribir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. En este caso escribiríamos $0 < \|x-a\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \epsilon$, es decir solamente exigimos que la imagen de la bola abierta pertorada $B'_{\delta(\epsilon)}(a)$ esté contenida en $B_\epsilon(f(a))$.

Notemos también que de acuerdo con la definición, para que una función sea continua en el punto "a", dicho punto tiene que pertenecer a $\mathcal{D}(f)$.

Caben entonces dos posibilidades para que una función sea continua en un punto a. O bien "a" es un punto aislado del dominio, en cuyo caso la condición $\|x-a\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \epsilon$ se cumple trivialmente, o bien si "a" es un punto de acumulación del dominio, la función es continua cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Tenemos entonces el siguiente resultado

Proposición 2:

Una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es continua en el punto $a \in \mathcal{D}(f)$ sí y solo sí se dan una de las dos condiciones siguientes

i) "a" es un punto aislado de $\mathcal{D}(f)$.

ii) "a" es un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Puede ocurrir (y de hecho es un caso interesante que ocurre con frecuencia), que una función no esté definida en el punto "a", pero que el punto "a" sea un punto de acumulación del dominio y además exista $\lim_{x \to a} f(x) = b$. En tal caso se puede extender el dominio de definición al punto "a", definiendo la función en dicho punto como el valor b que toma el límite en dicho punto, es decir definiendo $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = b$, con lo cual la función $f(x)$ pasa a ser continua en "a" por construcción. También puede presentarse el caso de que una función esté definida en el punto "a", pero el valor asignado en "a" no coincida con $\lim_{x \to a} f(x) = b$. En tal caso se puede (se debe) redefinir la función en el punto "a", en la forma $f(a) = b$, para que sea continua, y se habla de discontinuidad evitable.

Ejemplo: Estudiamos la continuidad de la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

De la desigualdad

$$\left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| + |y| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| + |y|$$

se sigue que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) = \epsilon/2$, tal que

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\|f(x,y) - f(0,0)\| \leq \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta(\epsilon) = \epsilon.$$

Por tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, y f es continua en $(0,0)$.

Def [Función continua en un conjunto].

Una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se dice continua en el conjunto $A \subset \mathcal{D}(f)$, si y solo si es continua en todos y cada uno de los puntos del conjunto A.

· Propiedades de los límites y de las funciones continuas

Proposición 3:

Dadas dos funciones $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = b+c$$

Como corolario de esta proposición tenemos que la suma de dos funciones continuas es una función continua. Evidentemente la suma de una función continua y otra que no lo es da como resultado una función que no es continua. Sin embargo, la suma de dos funciones discontinuas puede dar como resultado una función continua.

Así por ejemplo $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

son ambas discontinuas en $x=1$, pero su suma es la función constante $f(x) + g(x) \equiv 1$, que sí es continua.

Proposición 4:

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = bc$$

Como en el caso de la suma tenemos el corolario: el producto de dos funciones continuas es una función continua. Notemos que en el caso del producto, el producto de una función continua y otra que no lo es puede ser una función continua. Por ejemplo $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no es continua en $x=0$, pero multiplicando $f(x)$ por la función $g(x) = x$, obtenemos la función $f(x)\, g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ que sí es continua en $x=0$. En efecto $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) = \epsilon$, tal que si $|x| < \delta(\epsilon)$ se tiene $|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq |x| < \delta(\epsilon) = \epsilon$. También puede darse el caso de que el producto de dos funciones discontinuas sea una función continua. Por ejemplo, para la función escalón de Heaviside $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $\theta(x) = 1$, si $x \geq 0$ y $\theta(x) = 0$ si $x < 0$, tanto $\theta(x)$ como $1 - \theta(x)$ son funciones discontinuas en $x=0$. Sin embargo, el producto $\theta(x)(1 - \theta(x))$ es la función idénticamente nula, y por tanto es continua en $x=0$.

Proposición 5:

- Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

- Como corolario, dadas dos funciones $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si f y g son continuas en "a" y $g(a) \neq 0$, entonces $f(x)/g(x)$ también es continua en "a".

Proposición 6:

- Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, descomponiéndola en sus m componentes $f = (f_1, \dots, f_m)$, tenemos

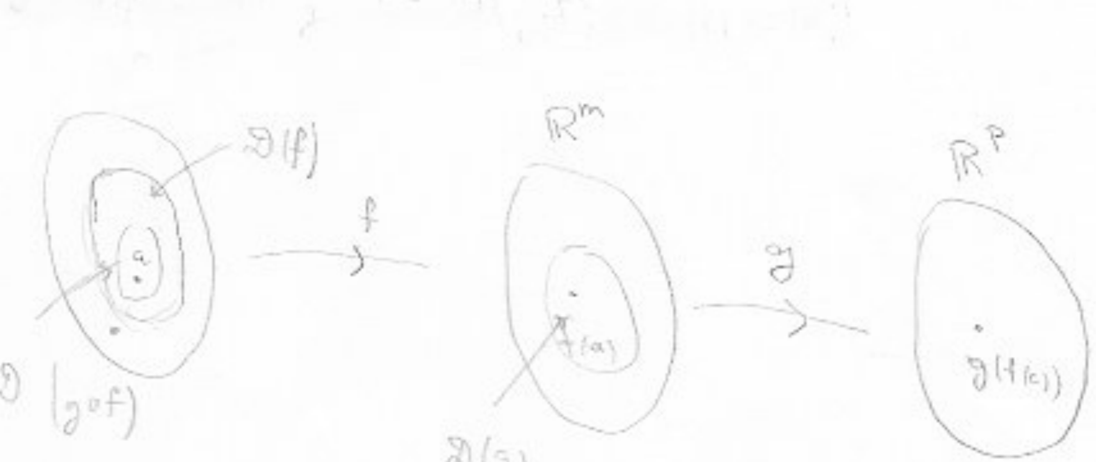
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

siendo $b = (b_1, \dots, b_m)$.

- Como corolario, una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si son continuas todas y cada una de sus funciones componentes.

Proposición 7:

Sean las funciones $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, y consideramos la función compuesta definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Si f es continua en "a" y g es continua en $f(a) \Rightarrow$ $g \circ f$ es continua en "a".

- La demostración de las proposiciones 3, 4, 5, 6, 7, son ejercicios rutinarios "ϵ-δ" que pueden encontrarse en cualquier libro de Cálculo o de Análisis Matemático.

- Damos a continuación 3 lemas que son muy útiles en el análisis de la existencia y el cálculo de límites.

Lema 1: [Permanencia del signo].

- Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $f(x)$ es continua en $a \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(f)$, y

$f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, entonces $\exists r > 0$ tal que $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ $\forall x \in B_r(a)$.

- Es decir, una función escalar $f(x)$ que sea continua en el punto a, y no se anule en dicho punto, conserva su signo en una bola abierta centrada en el punto a

- Demostración: Si $f(a) > 0$, dado $\epsilon = f(a)$, puesto que f es continua en "a" para este $\epsilon = f(a)$; podemos encontrar un $\delta(\epsilon)$ (igual al r que buscamos) tal que si $x \in B_{\delta(\epsilon)}(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Y por tanto

$-\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon$. Luego $f(x) > f(a) - \epsilon = 0$ $\quad \forall x \in B_{\delta(\epsilon)}(a)$

Para $f(a) < 0$, se obtiene el resultado considerando la función $-f(x)$.

Lema 2: [Criterio de comparación]

Dadas tres funciones, $f, g, h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $\exists r > 0$ tal que se cumple

- la desigualdad $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x \in B_r(a)$, se tiene

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} h(x) = b.$$

- Esta proposición nos dice que si podemos minorar y mayorar una función h en el entorno del punto a, por dos funciones f y g que tienen un límite común b en el punto "a"; entonces la función h también tiene límite b en el punto "a".

- Este lema es útil cuando f y g son mas simples que h

- Demostración: Dado $\epsilon > 0$

Por ser $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\exists\, \delta_1(\epsilon) \mid$ si $\|x-a\| < \delta_1(\epsilon) \Rightarrow |f(x)-b| < \epsilon$

Por ser $\lim_{x \to a} g(x) = b$, $\exists\, \delta_2(\epsilon) \mid$ si $\|x-a\| < \delta_2(\epsilon) \Rightarrow |g(x)-b| < \epsilon$

Entonces tomando $\delta_3(\epsilon) = \min(\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon))$, para $\|x-a\| < \delta_3(\epsilon)$ tenemos

$-\epsilon < f(x)-b < \epsilon$ y $-\epsilon < g(x)-b < \epsilon$. Luego de $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,

se sigue $-\epsilon < f(x)-b \leq h(x)-b \leq g(x)-b < \epsilon$. Y por tanto

$|h(x)-b| < \epsilon$. Luego $\exists \lim_{x \to a} h(x) = b$

- Lema 3:

- Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\exists\, M, r > 0$ tales que $|g(x)| \leq M \ \forall x \in B_r(a) \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$.

  - Es decir, el producto de una función que tiene límite cero en el punto "a", y una función $g(x)$ que es localmente acotada en la vecindad de "a", da una función $f(x)\, g(x)$ que también tiene límite cero en el punto "a".

Demostración: Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, dado $\epsilon > 0$, y tomando $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$

para $\epsilon' > 0$, $\exists\, \delta'(\epsilon') > 0$ tal que si $\|x-a\| < \delta'(\epsilon') \Rightarrow |f(x) - 0| = |f(x)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$,

Entonces tomando $\delta(\epsilon) = \min(\delta'(\epsilon'), r)$ resulta que si $\|x-a\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow$

$|f(x) g(x) - 0| = |f(x)\, g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < \epsilon' . M = \epsilon$, y por tanto

$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x,y) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x+y}$

Entonces $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x = 0$ y $\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x+y} \right| \leq 1 \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x+y} = 0$

El lema 3. es muy útil y lo utilizaremos en numerosísimas ocasiones.