Tema 4: Derivabilidad de funciones de una variable real. Polinomio de Taylor

I. V. Toranzo

Cálculo (GII)

Derivabilidad de una función

Desde un punto de vista intuitivo, una función derivable es aquella cuya gráfica no presenta "saltos" ni "picos".

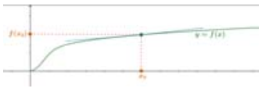


Fig. 1: Gráfica de una función derivable.

Definición: Se define la **derivada** de f en el punto x_0 como el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

Se dice que f es derivable en x_0 si:

❶ $\exists\, f'(x_0)$

❷ $f(x_0) < \infty$

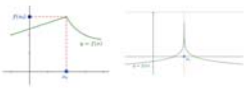


Fig. 2: Gráficas de funciones no derivables.

Posibles notaciones de la derivada de f en x_0 son:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x)\Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

df = **diferencial** de f

dx = **diferencial** de x.

$\Rightarrow$ **Si una función es derivable en x_0 es continua en x_0.**

Propiedades:

Sean f y g funciones derivables en x_0 y $k \in \mathbb{R}$, entonces:

❶ **Suma.** $f(x) + g(x)$ es derivable en x_0, donde

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

❷ **Producto por un escalar.** $cf(x)$ es derivable en x_0, donde

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

❸ **Producto.** $f(x)g(x)$ es derivable en x_0, donde

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

❹ **Cociente.** Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en x_0, donde

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

❺ **Regla de la cadena.** Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f)$ es derivable en x_0, donde

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Recta tangente: Si f es una función derivable en el punto x_0, la **recta tangente** a la gráfica de la función de f en x_0 viene dada por

$$y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

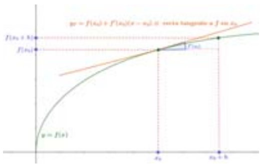


Fig. 3: Representación gráfica del límite de una función.

$\Rightarrow$ Si f es una función derivable en un **abierto**, I, entonces f' es la función que a cada $x \in I$ le asigna el valor $f'(x)$.

Propiedades:

Sean f y g funciones definidas en un abierto I, entonces:

❶ Si $f'(x) = 0\ \forall x \in I$, entonces f es la función **constante** en I.

❷ Si $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in I$, entonces $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$ en I.

Derivadas laterales:

- **Por la derecha.**

  Se define la derivada lateral por la derecha como

  $$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

  Se dice que f es derivable por la derecha en x_0 si
  - f es continua por la derecha en x_0
  - $\exists f'_+(x_0) < \infty$.

- **Por la izquierda.**

  Se define la derivada lateral por la izquierda como

  $$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

  Se dice que f es derivable por la izquierda en x_0
  - f es continua por la izquierda en x_0
  - $\exists f'_-(x_0) < \infty$.

$\Rightarrow$ **Una función f es derivable en x_0 sii es derivable por la derecha y por la izquierda en x_0 y ambas derivadas laterales coinciden.**

Derivada de la función inversa:

Si f es

❶ **continua e inyectiva** en un abierto I

❷ **derivable** en $x_0 \in I$

❸ $f'(x_0) \neq 0$

❹ f^{-1} es derivable en $f(x_0)$

Entonces f^{-1} viene dada por

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{o} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Teoremas importantes:

❶ **Teorema de Rolle.** Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces

$$\exists\, x \in (a,b) \quad \text{tal que} \quad f'(x) = 0$$

❷ **Teorema del valor medio.** Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), entonces

$$\exists\, x \in (a,b) \quad \text{tal que} \quad f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

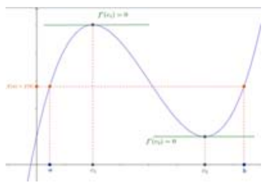


Fig. 4: Representación gráfica del Teorema de Rolle.

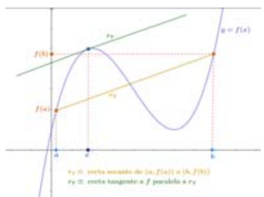


Fig. 5: Representación gráfica del teorema del valor medio.

Regla de Bernouilli-L'Hôpital:

Esta regla hace uso de la derivación como herramienta para resolver límites con cierto tipo de indeterminaciones.

Condiciones de aplicabilidad:

❶ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$

❷ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$

Si se cumple la condición 1 **o** la condición 2, entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

donde $\alpha = x_0, x_0^{\pm}, \pm\infty$.

Tabla de derivadas:

La siguiente tabla recoge la derivada de funciones elementales[1].

$(k)' = 0$	$(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$
$(\log f)' = \frac{f'}{f}$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \log a}$
$(e^f)' = f' e^f$	$(a^f)' = f' a^f \log a$
$(\sin f)' = f' \cos f$	$(\cos f)' = -f' \sin(f)$
$(\tan f)' = f' \sec^2 f$	$(\cot(f))' = f' \mathrm{cosec}^2 f$
$(\sec f)' = f' \sec f \tan f$	$(\mathrm{cosec} f)' = -f' \mathrm{cosec} f \cot f$
$(\arcsin f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\arctan f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\lvert f\rvert)' = \frac{f}{\lvert f\rvert} f'$
$(\sinh f)' = f' \cosh f$	$(\cosh f)' = f' \sinh f$

Aplicaciones

Las principales aplicaciones de la derivada son:

1) Tasa de cambio

A qué ritmo crece/decrece f.

- **Esbozo de la gráfica de f**

  Determinación de los intervalos en los que f crece/decrece.

2) Cálculo de puntos críticos

Un punto crítico, x_c, de una función f es aquel tal que $f'(x_c) = 0$ o $\nexists f'(x_c)$

- Determinación de máximos y mínimos (**relativos/absolutos**).

  Puntos en los que f alcanza su valor máximo/mínimo en un **abierto/cerrado**.

3) Problemas de optimización

Determinación de los valores máximo/mínimo de f sujeta a ciertas restricciones.

4) Solución aproximada de ecuaciones no lineales, $f(x) = 0$

Un método muy utilizado para aproximar la solución de ecuaciones no lineales, $f(x) = 0$, es el **método de Newton-Raphson**, que hace uso de la derivada de f.

5) **Polinomio de Taylor**

Aproximación de una función no polinómica mediante un polinomio de grado n en un entorno del punto $x_0 \in D_f \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema de Taylor. Sea f una función continua con derivadas continuas hasta orden n en un entorno cerrado del punto x_0, y donde $f^{(n+1)}(x)$ está definida en un entorno abierto de x_0. Entonces,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x_0 \leq \xi \leq x$$

donde

- $P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ es el **polinomio de Taylor de grado** n de f centrado en el punto x_0.
- $R_{n,\xi}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ es el **residuo de Taylor** de f centrado en x_0.

En el caso particular, $x_0 = 0$, se dice que

- $P_{n,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ es el **polinomio de McLaurin de grado** n de f centrado en $x_0 = 0$.
- $R_{n,\xi}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ es el **residuo de McLaurin** de f en el punto $x_0 = 0$.

[1] $\alpha, c, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $f = f(x)$.

Temas 4 y 5: Derivabilidad de funciones de una variable real. Polinomio de Taylor. Representación gráfica de funciones

I. V. Toranzo

Cálculo (GII)

Tabla de polinomios de McLaurin:

La siguiente tabla recoge los polinomios de McLaurin de grado n que más suelen emplearse.

$P_{n,0}(x)$	$R_{n,\xi}(x)$
$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}^2 x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(1+c)^{n1}}\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}$
$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$	$\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$
$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$	$\frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}x^{n+1}$
$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\frac{(-1)^{n+1}\sin(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\frac{(-1)^{n+1}\sin(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\arctan(x) \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	
$\cosh(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	
$\sinh(x) \approx x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	

Fig. 1: De izquierda a derecha y de arriba a abajo, polinomios de McLaurin de $f(x) = e^x, \frac{1}{1+x}, \arctan(x), \sinh(x)$

Aplicaciones teórico-prácticas

1. Cálculo del polinomio de Taylor/McLaurin de grado n de una función f alrededor del punto x_0
2. Cálculo del valor aproximado de una función en un punto con k cifras significativas
3. Estimación del intervalo en el que el polinomio de Taylor/McLaurin de una función f la aproxima con una cota de error de k cifras significativas
4. Determinar el error cometido al aproximar el valor de una función f en un punto x_0, por su polinomio de Taylor de grado n
5. Acotar el residuo del polinomio de Taylor de grado n de una función f

Estudio de funciones y representación gráfica

La **gráfica** de una función f permite visualizar propiedades de esta que de otro modo son difíciles de detectar.

Guía para la representación gráfica de funciones

1. **Dominio** de $f \Rightarrow$ conjunto de puntos en el que $\exists\, f(x)$
2. **Continuidad** de $f \Rightarrow$ conjunto de puntos en el que f es continua; detectar y clasificar los puntos de discontinuidad
3. **Asíntotas**
   - **Verticales**, $x = x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$
   - **Horizontales**, $y = L \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$
   - **Oblicuas**[1], $y = mx + n$ con

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

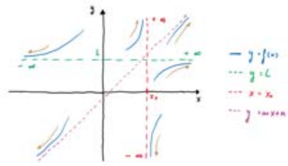


Fig. 2: Tipos de asíntotas: horizontal (verde), vertical (rojo) y oblicua (morado)

4. **Cortes con los ejes**
   - Eje $x \Rightarrow f(x) = 0$
   - Eje $y \Rightarrow y = f(0)$
5. **Simetrías**
   - f es **par** si $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ gráfica simétrica respecto del eje y
   - f es **impar** si $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ gráfica simétrica respecto del origen

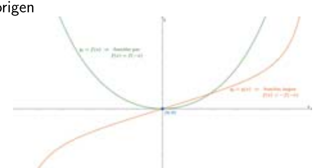


Fig. 3: Función simétrica respecto del eje y (verde) y función simétrica respecto del origen (naranja)

6. **Puntos críticos y extremos locales**
   - x^* es un **punto crítico** de f si $f'(x^*) = 0$ o $\nexists\, f'(x^*)$
   - Extremos locales $\Rightarrow$ test de la primera derivada[2]

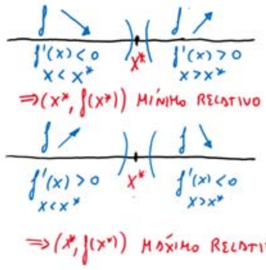


Fig. 4: Detección de extremos relativos de la gráfica de f mediante el test de la primera derivada

7. **Concavidad y puntos de inflexión**
   - x^* es un **punto de inflexión** de f si $f''(x^*) = 0$ o $\nexists\, f''(x^*)$
   - Concavidad/Convexidad $\Rightarrow$ test de la segunda derivada[3]

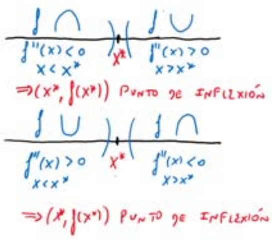


Fig. 5: Detección de los puntos de inflexión de la gráfica de f mediante el test de la segunda derivada

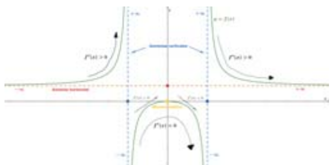
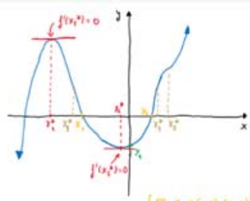


Fig. 6: asíntotas, simetría, monotonía, extremos y concavidad/convexidad de la gráfica de f



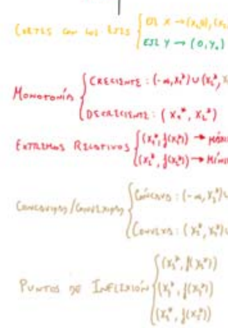


Fig. 7: Puntos de corte con los ejes, monotonía, extremos, concavidad/convexidad y puntos de inflexión de la gráfica de f

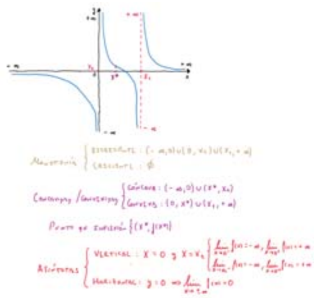


Fig. 8: Asíntotas, monotonía, concavidad/convexidad y puntos de inflexión de la gráfica de f

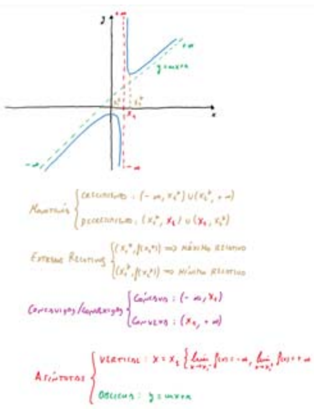


Fig. 9: Asíntotas, monotonía, extremos relativos y concavidad/convexidad de la gráfica de f

[1] Si f tienes una asíntota oblicua entonces no tiene asíntotas horizontales

[2] El test de la primera derivada se basa en el **signo** de f' a la izquierda y a la derecha del punto crítico x^*

[3] El test de la segunda derivada se basa en el **signo** de f'' a la izquierda y a la derecha del punto x^* tal que $f''(x^*) = 0$ o $\nexists\, f''(x^*)$