

TEMA 6. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

FORMA CANÓNICA DE JORDAN

La forma canónica de Jordan (J) no es más que la matriz asociada a un endomorfismo más sencilla posible:

$$J = M(f, B^*, B^*)$$

B^* es la base más óptima:

- Si el endomorfismo es estrictamente diagonalizable B^* está formada por AUTOVECTORES.
- Si el endomorfismo no es estrictamente diagonalizable B^* está formada por AUTOVECTORES y no AUTOVECTORES.

λ es autovalor de un endomorfismo f si $\exists$ un vector $\vec{v}$ tal que:

$$f(\vec{v}) = \lambda(\vec{v})$$

Se dice que $\vec{v}$ es autovector asociado a λ .

LA MATRIZ ASOCIADA EN UNA BASE FORMADA POR AUTOVECTORES ES DIAGONAL (J).

→ CÁLCULO DE AUTOVALORES. POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Los autovalores son las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

La cantidad de veces que tenemos un autovalor se llama MULTIPLICIDAD y se escribe i_λ ($\sum \lambda = 1$ doble $\rightarrow i_{\lambda=1} = 2$)

El conjunto formado por los autovalores se llama ESPECTRO.

Siempre hay tantos autovalores como dimensión tenga el espacio.

→ CÁLCULO DE AUTOVECTORES. SUBESPACIO INVARIANTE

Dado un autovalor λ el conjunto de todos los autovectores asociados a λ es un espacio vectorial llamado subespacio invariante, y se escribe $N_{\lambda, \lambda}$

$$N_{\lambda, \lambda} = \text{Ker}(A - \lambda I) = \{ \vec{x} \in E / (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \}$$

Un endomorfismo es estrictamente diagonalizable si la dimensión de $N_{\lambda, \lambda}$ es igual a i_λ .

Si $\lambda = 0$ es autovalor, entonces existe $N_{0,0}$, que es igual al $\text{Ker} f$

→ PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

DE UNA MATRIZ CUADRADA A

- A y A^t tienen los mismos autovalores.
- Si λ es autovalor de $A \rightarrow K\lambda$ es autovalor de KA .
- Si λ es autovalor de $A \rightarrow \lambda - K$ es autovalor de $(A - KI)$.
- Si λ es autovalor de A y A es regular ($|A| \neq 0$) $\rightarrow 1/\lambda$ es autovalor de A^{-1} .
- Si A y B son semejantes tienen los mismos autovalores.
- Si λ es autovalor de $A \rightarrow \lambda^n$ es autovalor de A^n .
- Si $\lambda = 0$ es autovalor de $A \rightarrow \text{Ker } A \neq \{0\}$ y se tiene que $N_{A,0} = \text{Ker } A$.
- Autovectores asociados a distintos autovalores son siempre l.i entre sí.

→ DETALLES ÚTILES

- 1.- Todas las matrices simétricas son estrictamente diagonalizables.
- 2.- Los autovalores simples ($r_\lambda = 1$) no dan problema para que A sea estrictamente diagonalizable.
- 3.- Siempre hay tantos autovalores (λ) como dim espacio, pero no siempre hay tantos autovectores como dim espacio (sólo cuando sea estrictamente diagonalizable).

- 4.- Si $\dim E = 3$ y tengo dos autovectores (E_1) $\bar{v}_1 = (1, 1, 0)$; $\bar{v}_2 = (0, 1, 3)$

No puedo calcular el tercer autovector haciendo:

$$\begin{aligned} (1, 1, 0) \cdot (x, y, z) &= 0 \Rightarrow x + y = 0 \\ (0, 1, 3) \cdot (x, y, z) &= 0 \Rightarrow y + 3z = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\bar{v}_3 = (3, -3, 1)$$

Sólo es cierto si tenemos 3 autovalores simples

- 5.- Si $\bar{v}$ es autovector $\begin{cases} J(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \\ A(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \end{cases} \rightarrow (A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{v}$ es autovector si $\in \text{Ker}(A - \lambda I)$, por eso sabemos cómo se calculan los autovectores.

- 6.- Teorema de CAILEY - HAMILTON: toda matriz A es raíz de su polinomio característico.

APLICACIÓN: sabiendo que los autovalores son $\lambda = 3, \lambda = -1, \lambda = 2$ calcula $A^7 - 4A^6 + A^5 + 6A^4 + 8I$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 1) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 \xrightarrow{\text{C-H}} A^3 - 4A^2 + A + 6I = \bar{0} \\ A^7 - 4A^6 + A^5 + 6A^4 + 8I &= A^4(A^3 - 4A^2 + A + 6I) + 8I = \\ &= A^4 \cdot \bar{0} + 8I = \boxed{8I} \end{aligned}$$

→ MATRICES SEMEJANTES

Definición: dos matrices son semejantes si existe una matriz regular P ($|P| \neq 0$) tal que:

$$\boxed{A = P \cdot B \cdot P^{-1}}$$

Propiedades:

- ① LAS MATRICES ASOCIADAS (EN DISTINTAS BASES) A UN MISMO ENDOMORFISMO SON SEMEJANTES ENTRE SÍ $\rightarrow \boxed{A = P \cdot J \cdot P^{-1}}$
- ② $\text{Traza}(A) = \text{Traza}(B) \rightarrow \text{Traza}(A) = \text{Traza}(J)$

③ $|A| = |B| \longrightarrow |A| = |J|$

④ A^n y B^n son semejantes $\longrightarrow A^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1}$

⑤ Si A, A^* son semejantes con la misma $P \longrightarrow \lambda A + \mu B$ es semejante a $\lambda A^* + \mu B^*$

⑥ $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ y $f(B)$ es un polinomio $\longrightarrow f(A) = P \cdot f(B) \cdot P^{-1}$

1 Sea el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz diagonal semejante a A (J)

b) Calcular la matriz de paso (P)

a) J Calculamos los autovalores:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) - (1-\lambda) \cdot 2 =$$

$$= (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 2) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2) = (1-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 3)$$

$\Rightarrow$ Son simples $\longrightarrow A$ es estrictamente diagonalizable

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) P Calculamos los autovectores

• $N_{1,1} = \text{Ker}(A - I) = \{ \bar{x} \in E / (A - I) \cdot \bar{x} = \bar{0} \}$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Ec's impl. $N_{1,1}$

$$N_{1,1} = \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,1}} = \{ (1, 0, -1) \}$$

• $N_{1,0} = \text{Ker}(A - 0I) = \{ \bar{x} \in E / A \cdot \bar{x} = \bar{0} \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Ec's impl. $N_{1,0}$

$$N_{1,0} = \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,0}} = \{ (1, 1, 1) \}$$

• $N_{1,3} = \text{Ker}(A - 3I) = \{ \bar{x} \in E / (A - 3I) \bar{x} = \bar{0} \}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ec's impl. $N_{1,3}$

$$N_{1,3} = \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,3}} = \{ (1, -2, 1) \}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$$

$$\begin{aligned}
 f(\bar{v}_1) &= 1 \cdot \bar{v}_1 \longrightarrow 1 \cdot (1, 0, -1) = (1, 0, 0) \\
 f(\bar{v}_2) &= 0 \cdot \bar{v}_2 \longrightarrow 0 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0) \\
 f(\bar{v}_3) &= 3 \cdot \bar{v}_3 \longrightarrow 3 \cdot (-1, -2, 1) = (0, 0, 3)
 \end{aligned}$$

Coordenadas de los transformados en B_{CAN}
Coordenadas de los transformados en B^*

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

$m(f, B^*, B^*)$

3 Calcular (J) y (P) para el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$A_B = M(f, B_{CAN}, B_{CAN}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

J Calculamos los autovalores

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda - 5 + 8) = (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

$\lambda = 3$
 $\lambda = 1$
 $\lambda = 3$

$\lambda = 3$ doble
 $\lambda = 1$ simple

P Cálculo de autovectores

$$\bullet N_{A,3} = \text{Ker}(A - 3I) = \{ \bar{x} \in E / (A - 3I)\bar{x} = \bar{0} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 2x - 4z = 0 \longrightarrow N_{A,3} \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{A,3}} = \{ (2, 0, 1), (0, 1, 0) \}$$

$\dim N_{A,3} = 2$
 $r_{A=3} = 2$

ESTRICTAMENTE DIAGONIZABLE !

$$\bullet N_{A,1} = \text{Ker}(A - I) = \{ \bar{x} \in E / (A - I)\bar{x} = \bar{0} \}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow N_{A,1} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{A,1}} = \{ (1, 0, 1) \}$$

$$M(J, B^*, B^*) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \{(2, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

4 Repetir el problema anterior sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Calcular J y P
- Calcular A^n
- Subespacios invariantes de A^n
- A^{-2} y A^{17}
- Calcular $A^8 - 6A^7 + 11A^6 - 6A^5 + A^4 - 6A^3 + 11A^2 - 7A + 5I$

a) J Calculamos los autovalores

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

→ SIMPLES → Estrictamente Diagonalizable →

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

P Calculo los autovectores

$$N_{1,1} = \text{Ker}(A - I) = \{\bar{x} \in E / (A - I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ -2x+y+2z=0 \end{matrix} \rightarrow N_{1,1} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,1}} = \{(1, 0, 1)\}$$

$$N_{1,2} = \text{Ker}(A - 2I) = \{\bar{x} \in E / (A - 2I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x+y=0 \\ -2x+y+z=0 \end{matrix} \rightarrow N_{1,2} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,2}} = \{(1, 1, 1)\}$$

$$N_{1,3} = \text{Ker}(A - 3I) = \{\bar{x} \in E / (A - 3I)\bar{x} = \bar{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -2x+y=0 \\ -y=0 \end{matrix} \rightarrow N_{1,3} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,3}} = \{(0, 0, 1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 - 3^n & 2^n - 1 & 3^n \end{pmatrix}$$

c) Los subespacios invariantes de A^n son los mismos que los de A

$$d) A^{-2} = P \cdot J^{-2} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-2} - 1 & 0 \\ 0 & 2^{-2} & 0 \\ 1 - 3^{-2} & 2^{-2} - 1 & 3^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 8/9 & -3/4 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$A^{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{17} - 1 & 0 \\ 0 & 2^{17} & 0 \\ 1 - 3^{17} & 2^{17} - 1 & 3^{17} \end{pmatrix}$$

$$e) p(\lambda) = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$p(A) = -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = \{ \text{CAILEY-HAMILTON} \} = 0$$

$$A^8 - 6A^7 + 11A^6 - 6A^5 + A^4 - 6A^3 + 11A^2 - 8A + 5I =$$

$$= A^5(A^3 - 6A^2 + 11A - 6I) + A \cdot (A^3 - 6A^2 + 11A - 6I) - 2A + 5I =$$

$$= 0 + 0 - 2A + 5I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ del que se sabe:

- i) $f(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2$
- ii) $f(\bar{e}_3 + \bar{e}_4) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4$
- iii) El polinomio característico de f tiene $\lambda = 2$ como raíz triple.
- iv) Las ecuaciones implícitas respecto de B del núcleo del endomorfismo $(f - 2I)$ son:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Calcular J y P
- b) Calcular $A = M(f, B, B)$ de dos maneras distintas.

a) Interpretación de datos

$$iv) \text{Ker}(A - 2I) = N_{1,2} \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$N_{1,2} \equiv \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = -\alpha - \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = -\alpha \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

$$B_{N_{1,2}} = \{(0, -1, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

i) " $f(\text{autovector}) = \lambda(\text{autovector})$ "

$$\lambda = -1 \text{ autovector ; } B_{N_{1,-1}} = \{\bar{e}_2\} = \{(0, 1, 0, 0, 0)\}$$

ii) $\lambda = 1$ autovector; $B_{N_{1,1}} = \{\bar{e}_3 + \bar{e}_4\} = \{(0, 0, 1, 1, 0)\}$

iii) $\lambda = 2$; $r_{\lambda=2} = 3$ } Estrictamente diagonalizable
 $\dim N_{1,2} = 3$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular $A = M(f, B, B)$ tenemos dos alternativas:

1)
$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Utilizando el teorema de caracterización:

$$f(0, 1, 1, -1, 0) = (0, -2, 2, -2, 0) \longrightarrow f(-\bar{e}_2 + \bar{e}_3 - \bar{e}_4) = -2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 - 2\bar{e}_4$$

$$f(1, 1, 0, 0, 0) = (2, -2, 0, 0, 0) \longrightarrow f(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$$

$$f(0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 2) \longrightarrow f(\bar{e}_5) = 2\bar{e}_5$$

$$f(0, 1, 0, 0, 0) = (0, -1, 0, 0, 0) \longrightarrow f(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2$$

$$f(0, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 1, 0) \longrightarrow f(\bar{e}_3 + \bar{e}_4) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4$$

TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN

$$\left. \begin{aligned} -f(\bar{e}_2) + f(\bar{e}_3) - f(\bar{e}_4) &= -2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 - 2\bar{e}_4 \\ f(\bar{e}_1) - f(\bar{e}_2) &= 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 \\ f(\bar{e}_5) &= 2\bar{e}_5 \\ f(\bar{e}_2) &= -\bar{e}_2 \\ f(\bar{e}_3) + f(\bar{e}_4) &= \bar{e}_3 + \bar{e}_4 \end{aligned} \right\} \text{Sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los transformados de la base de partida

$$f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$$

$$f(\bar{e}_2) = -\bar{e}_2$$

$$f(\bar{e}_3) = -3/2\bar{e}_2 + 3/2\bar{e}_3 - 1/2\bar{e}_4$$

$$f(\bar{e}_4) = 3/2\bar{e}_2 - 1/2\bar{e}_3 + 3/2\bar{e}_4$$

$$f(\bar{e}_5) = 2\bar{e}_5$$

$$\begin{pmatrix} 2, -3, 0, 0, 0 \\ 0, -1, 0, 0, 0 \\ 0, -3/2, 3/2, -1/2, 0 \\ 0, 3/2, -1/2, 3/2, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 2 \end{pmatrix}$$

Coordenadas en la base de llegada

$$\downarrow \\ A = M(f, B, B)$$

7 Diagonaliza la matriz asociada al siguiente endomorfismo:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -7x_1 - 4x_2, x_1)$$

Auto de nada necesito $A = M(f, B_{\text{can}_{\mathbb{R}^3}}, B_{\text{can}_{\mathbb{R}^3}})$

Necesito $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ y $f(0, 0, 1)$

$$\bullet f(1, 0, 0) = (0, -7, 1)$$

$$\bullet f(0, 1, 0) = (0, -4, 0)$$

$$\bullet f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

Las coordenadas en la base de llegada $\equiv B_{\text{can}_{\mathbb{R}^3}}$ son las mismas. Luego:

$$A = M(f, B_{\text{can}_{\mathbb{R}^3}}, B_{\text{can}_{\mathbb{R}^3}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Calculamos los autovalores

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -7 & -4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-4-\lambda) - (-4-\lambda) = (-4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -4 \end{cases}$$

3 autovalores SIMPLES $\Rightarrow$ Estrictamente diagonalizable

$$A' = M(f, B', B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = J$$

P Calculamos los autovectores

$$\bullet N_{1,1} = \text{Ker}(A - I) = \{ \bar{x} \in E / (A - I) \bar{x} = \bar{0} \}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -7x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow N_{1,1} = \begin{cases} x_1 = -5\alpha \\ x_2 = 7\alpha \\ x_3 = -5\alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,1}} = \{(-5, 7, -5)\}$$

$$\bullet N_{1,-1} = \text{Ker}(A + I) = \{ \bar{x} \in E / (A + I) \bar{x} = \bar{0} \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -7x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow N_{1,-1} = \begin{cases} x_1 = -3\alpha \\ x_2 = 7\alpha \\ x_3 = 3\alpha \end{cases}$$

$$B_{N_{1,-1}} = \{(-3, 7, 3)\}$$

$$\bullet N_{1,-4} = \text{Ker}(A + 4I) = \{ \bar{x} \in E / (A + 4I) \bar{x} = \bar{0} \}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_3 = 0 \\ -7x_1 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow N_{1,-4} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$B_{N_{1,-4}} = \{(0, 1, 0)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 7 & 7 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$