

Aplicaciones lineales

1. Definiciones y propiedades

1.1. Definición. Aplicación lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y f una aplicación de E en F .

f es una aplicación lineal si verifica

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E \\f(\lambda x) &= \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in E\end{aligned}$$

NOTA: Se empleará indistintamente la palabra homomorfismo o aplicación lineal.

1.2. Teorema.

f es un homomorfismo o aplicación lineal si y sólo si

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall \lambda, \mu \in K; \forall x, y \in E.$$

1.3. Propiedades de las aplicaciones lineales

Las principales propiedades de los homomorfismos entre espacios vectoriales son

- $f(0) = 0$.
- $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.
- La imagen de un subespacio vectorial V de E es un subespacio vectorial de F . En particular, $f(E)$ recibe el nombre de subespacio imagen de f . Se suele denotar $\text{Im } f$.
- Si S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial V de E , entonces $f(S)$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial $f(V)$. Por tanto, f es sobre si siendo B una base de E , $f(B)$ es un sistema de generadores de F .
- Si V es un subespacio de F , $f^{-1}(V)$ es un subespacio de E .

1.4. Nomenclatura

Sea f un homomorfismo de E en F .

- Si $E = F$, a f se le denomina endomorfismo.
- Si f es inyectivo, se denomina monomorfismo.
- Si f es sobre, se llama epimorfismo.
- Si f es biyectivo recibe el nombre de isomorfismo.
- Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

1.5. Definición. Núcleo

Se llama núcleo de una aplicación lineal f , designándose $\text{Ker } f$ ó $N(f)$, al conjunto

$$\text{Ker } f = \{ x \in E / f(x) = 0 \}.$$

1.6. Propiedades del núcleo

Las principales propiedades del núcleo son las siguientes

- $\text{Ker } f$ es un subespacio vectorial de E .
- f es un homomorfismo inyectivo si y sólo si $\text{Ker } f = \{0\}$.
- $\text{Ker } f = \{0\}$ si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de E es un sistema libre de F .

NOTA: Si la restricción de f a un subespacio V de E es inyectivo y S es un sistema libre de V entonces $f(S)$ es un sistema libre de $f(V) \subset F$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados dos espacios vectoriales E y F , determinar qué aplicaciones $f: E \rightarrow F$ de las siguientes son homomorfismos

- i) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x + x_0$, con x_0 un vector fijo de $\mathbb{R}^3$.
- ii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x_0$, con x_0 un vector fijo de $\mathbb{R}^3$.
- iii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$, siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$.
- iv) $E = F = M_{n \times n}$, $f(A) = A + A'$.
- v) $E = F = P_3(\mathbb{R})$, $f[p(x)] = xp'(x)$.

SOLUCIÓN:

- i) $f(x+y) = x+y+x_0$, $f(x)+f(y) = x+y+x_0+x_0$. Para que sean iguales $x_0 = 0$, es decir, si $x_0 \neq 0$ no es homomorfismo y si $x_0 = 0$ queda $f(x) = x$, que trivialmente es homomorfismo.
- ii) $f(x+y) = x_0$ y $f(x)+f(y) = x_0+x_0$, por tanto, si $x_0 \neq 0$ no es homomorfismo y si $x_0 = 0$ es el homomorfismo nulo, es decir, $f(x) = 0$, $\forall x \in E$.
- iii) $f(1,0,1) = (1,0,1)$, $f(2,0,1) = (4,0,1)$ y $f(3,0,2) = (9,0,2)$. Como se tiene que $f(1,0,1) + f(2,0,1) \neq f(3,0,2)$, no es homomorfismo.
- iv) Sean $A, B \in M_{n \times n}$ y sean $\lambda, \mu \in K$.

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)' = \lambda A + \mu B + \lambda A' + \mu B' \\ &= \lambda(A + A') + \mu(B + B') = \lambda f(A) + \mu f(B). \end{aligned}$$

Por tanto, f es aplicación lineal.

- v) Sean $p(x), q(x) \in P_3(\mathbb{R})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f[\lambda p(x) + \mu q(x)] &= x[\lambda p(x) + \mu q(x)]' = x[\lambda p'(x) + \mu q'(x)] \\ &= \lambda xp'(x) + \mu xq'(x) = \lambda f[p(x)] + \mu f[q(x)]. \end{aligned}$$

Por tanto, f es homomorfismo.

2. Estudiar si las aplicaciones

- i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2, -x_3)$.
- ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y, z) = (x+y, 0)$

son aplicaciones lineales. En caso afirmativo, calcular su núcleo y su imagen. Estudiar su inyectividad.

SOLUCIÓN:

- i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\begin{aligned} f[\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3)] &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= (\lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, -\lambda x_3 - \mu y_3) \\ &= (\lambda x_3 + \mu y_3, \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2), -\lambda x_3 - \mu y_3) \\ &= \lambda(x_3, x_1 + x_2, -x_3) + \mu(y_3, y_1 + y_2, -y_3) \\ &= \lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu f(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una aplicación lineal. Para calcular la imagen de f , $\text{Im } f$, siendo $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$ se tiene que

$$\begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = -x_3 \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas del subespacio imagen; por tanto, un sistema S de generadores será (haciendo $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$) $S = \{(0, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ y una base será $B = \{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$, por tanto, $\dim \text{Im } f = 2$ de donde se deduce que f no es sobreyectiva.

Tema 11. Aplicaciones Lineales

Como sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$, tendremos que $\dim \text{Ker } f = 1$.
 $\text{Ker } f$ será la solución del sistema

$$\begin{cases} 0 = x_3 \\ 0 = x_1 + x_2 \\ 0 = -x_3 \end{cases}$$

que son unas ecuaciones implícitas del núcleo. Para obtener unas ecuaciones paramétricas resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de $\text{Ker } f$. Haciendo $\lambda = 1$, se obtiene una base de $\text{Ker } f$, $B_{\text{Ker } f} = \{(-1, 1, 0)\}$, por lo tanto, f no es inyectiva.

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\begin{aligned} f[\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')] &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 0) = (\lambda(x + y) + \mu(x' + y'), 0) \\ &= \lambda(x + y, 0) + \mu(x' + y', 0) = \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z') \end{aligned}$$

Luego f es lineal.

Calculamos $\text{Im } f$. Como $f(1, 0, 0) = (1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0)$, $f(0, 0, 1) = (0, 0)$, los vectores imagen $\{(1, 0), (1, 0), (0, 0)\}$ forman un sistema de generadores de la imagen. Una base de la imagen puede ser $B_{\text{Im } f} = \{(1, 0)\}$ y $\dim \text{Im } f = 1$, con lo cual f no es sobre.

Unas ecuaciones paramétricas de $\text{Im } f$ son

$$\begin{cases} y_1 = \lambda \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Una ecuación implícita de $\text{Ker } f$ es $x + y = 0$.

Entonces unas ecuaciones paramétricas de $\text{Ker } f$ son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \mu \end{cases}$ y una base del núcleo de f es $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$. Por tanto la aplicación f no es inyectiva, ya que $\text{Ker } f \neq \{0\}$.

3. Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

donde (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas de un vector y su transformado en la base canónica, calcular

- $\text{Ker } f$.
- $\text{Im } f$.
- $f(V)$, siendo $V = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

SOLUCIÓN:

i) $\text{Ker } f$ viene dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Una base de $\text{Ker } f$ puede ser $B_{\text{Ker } f} = \{(1, -1, 0)\}$.

ii) Calculamos los transformados de la base canónica

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0) \quad f(0, 1, 0) = (1, 1, 0) \quad f(0, 0, 1) = (1, -1, 1)$$

Por tanto, $S = \{(1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im } f$ siendo una posible base $S' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$.

iii) V es un subespacio de dimensión 2. Un sistema de generadores de V puede ser $S = \{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$. Entonces, $f(S) = \{(0, 0, 0), (0, 4, -2)\}$ es un sistema de generadores de $f(V)$. Una base de $f(V)$ puede ser $B_{f(V)} = \{(0, 4, -2)\}$.

9. Se considera el homomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que hace corresponder a los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ los vectores $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, respectivamente. Se pide

i) Matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

ii) Subespacio transformado de $V \equiv x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

SOLUCIÓN:

i) Sean

$$B_c = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\} \quad B_c^* = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)\}$$

las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Para calcular la matriz del homomorfismo en las bases canónicas, $M(f, B_c, B_c^*)$, necesitamos conocer las coordenadas en B_c^* de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$.

Conocemos las imágenes de los vectores de la base

$$B = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)\}.$$

Debemos, por tanto, expresar los vectores de B_c en función de los de B .

Como $(1, 0, 0) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$, entonces

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= \frac{1}{2}f(v_1) - \frac{1}{2}f(v_2) + \frac{1}{2}f(v_3) \\ &= \frac{1}{2}(0, 1) - \frac{1}{2}(0, 2) + \frac{1}{2}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

Como $(0, 1, 0) = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$, se tiene,

$$f(0, 1, 0) = -\frac{1}{2}f(v_1) + \frac{1}{2}f(v_2) + \frac{1}{2}f(v_3) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Como $(0, 0, 1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$ se obtiene

$$f(0, 0, 1) = \frac{1}{2}f(v_1) + \frac{1}{2}f(v_2) - \frac{1}{2}f(v_3) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

$$\text{Entonces, } M(f, B_c, B_c^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) $V \equiv x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= \mu \\ x_3 &= \lambda + \mu \end{aligned}$$

y una posible base de V es $B_V = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. $\{f(1, 0, 1), f(0, 1, 1)\}$ será un sistema de generadores de $f(V)$. Como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

el vector $(0, 1)$ es una base de $f(V)$ siendo unas posibles ecuaciones paramétricas de $f(V) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \end{cases}$ y una posible ecuación implícita de $f(V)$ es $x_1 = 0$. Obsérvese que “hemos perdido” dimensiones por medio del homomorfismo f , ya que siendo V de dimensión 2, $f(V)$ es de dimensión 1.

11. Se define un homomorfismo $f: E^3 \rightarrow E^4$ tal que $f(e_1 - e_3) = u_1$, $f(e_2 - e_3) = u_1 - u_2$ y $f(2e_3) = 2u_1 + 2u_3$, donde $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E^3 y $B' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es una base de E^4 . Se pide

- Matriz asociada a f en las bases B y B' .
- Ecuaciones no paramétricas de $\text{Im } f$.
- Núcleo de f .
- Ampliando una base del núcleo a una de E^3 , hallar la matriz de f en dicha base y en la base B' de E^4 .

SOLUCIÓN:

- i) Para obtener la matriz asociada a f en B y B' nos hace falta conocer $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$. Al ser

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1) - f(e_3) = u_1 \\ f(e_2 - e_3) &= f(e_2) - f(e_3) = u_1 - u_2 \\ f(2e_3) &= 2f(e_3) = 2u_1 + 2u_3 \end{aligned}$$

Se deduce que

$$f(e_3) = u_1 + u_3 \quad f(e_1) = 2u_1 + u_3 \quad f(e_2) = 2u_1 + u_3 - u_2$$

Por tanto, $M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ii) Un sistema de generadores del subespacio imagen será

$$S = \{(1, 0, 1, 0), (2, 0, 1, 0), (2, -1, 1, 0)\}$$

Vamos a comprobar que es un sistema libre.

$$\begin{aligned} \lambda(1, 0, 1, 0) + \mu(2, 0, 1, 0) + \rho(2, -1, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \implies \\ \begin{cases} \lambda + 2\mu + 2\rho &= 0 \\ -\rho &= 0 \\ \lambda + \mu + \rho &= 0 \end{cases} &\implies \lambda = \mu = \rho = 0. \end{aligned}$$

S es un sistema libre y por tanto, S es una base de $\text{Im } f$, con lo que $\dim \text{Im } f = 3$. El número de ecuaciones implícitas de $\text{Im } f$ será $4 - 3 = 1$.

Obtenemos en primer lugar unas ecuaciones paramétricas de $\text{Im } f$ que serán

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + 2\mu + 2\rho \\ x_2 = -\rho \\ x_3 = \lambda + \mu + \rho \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación implícita es $x_4 = 0$.

- iii) Teniendo en cuenta que $\dim E^3 = 3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$ y como $\dim \text{Im } f = 3$, se tiene que $\dim \text{Ker } f = 0 \implies \text{Ker } f = \{0\}$, por tanto, f es inyectivo.

- iv) Como el núcleo se reduce al vector cero, cualquier base de E^3 es una base ampliada de la del núcleo; por ejemplo $B^* = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$.

Nos piden $M(f, B^*, B')$; por lo tanto, necesitamos conocer las imágenes de los vectores $(1, -1, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(1, -1, 0) = (0, 1, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(0, 1, 1) = (3, -1, 2, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(0, 1, 0) = (2, -1, 1, 0)$$

Por lo tanto, $M(f, B^*, B') = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Se define una aplicación lineal $f: E_3 \rightarrow E'_3$ de manera que $f(e_1) = u_1 - u_2$, $f(e_2) = u_2$, $f(e_3) = u_1$ siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ bases de E_3 y E'_3 , respectivamente.

Se pide

i) Matriz asociada a f en las bases B y B' .

ii) Dimensión de $\text{Im } f$.

iii) Una base de $\text{Ker } f$.

iv) Calcular unas ecuaciones implícitas de $f(V)$ si $V \equiv \begin{cases} x_1 = \rho \\ x_2 = \rho \\ x_3 = \rho + \delta \end{cases}$

v) Si en E_3 se realiza el cambio de base $B_1^* = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ donde $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_1 + e'_2$ y $e_3 = e'_1 + e'_3$, calcular la nueva matriz asociada a f en las bases B_1^* y B' .

vi) Si en E'_3 se hace el cambio de coordenadas $x'_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $x'_2 = x_1 - x_2$ y $x'_3 = x_3$, calcular la nueva matriz asociada a f , siendo (x'_1, x'_2, x'_3) las coordenadas en una nueva base B_2^* .

vii) Obtener la matriz de f cuando se realizan simultáneamente los dos cambios anteriores.

SOLUCIÓN:

- i) Por ser la matriz asociada la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ se tiene

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ii) $S = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im } f$. El conjunto $T = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es una base de $\text{Im } f$; por tanto, $\dim \text{Im } f = 2$ (el vector $(1, -1, 0)$ es combinación lineal de los vectores de T).

- iii) Calculamos $\text{Ker } f$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas del $\text{Ker } f$, por tanto, $B_{\text{Ker } f} = \{(1, 1, -1)\}$ es una base del $\text{Ker } f$.

- iv) $B_V = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es una base de V ; por tanto, $f(B_V) = \{f(1, 1, 1), f(0, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores de $f(V)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(1, 1, 1) = (2, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

luego, $B_{f(V)} = \{(1, 0, 0)\}$ es una base de $f(V)$ y unas ecuaciones paramétricas de $f(V)$ son

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El número de ecuaciones implícitas es $3 - 1 = 2$ por lo tanto

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones implícitas de $f(V)$.

- v) Si $B_1^* = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ para calcular $M(f, B_1^*, B')$ necesitamos conocer las imágenes de e'_1, e'_2 y e'_3

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(e'_1) \\ f(e_2) &= f(e'_1) + f(e'_2) \\ f(e_3) &= f(e'_1) + f(e'_3) \end{aligned}$$

de donde

$$f(e'_1) = (1, -1, 0), \quad f(e'_2) = (-1, 2, 0), \quad f(e'_3) = (0, 1, 0);$$

por tanto $M(f, B_1^*, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- vi) La ecuación matricial del cambio de base es

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

siendo (x'_1, x'_2, x'_3) las coordenadas en la nueva base B_2^* y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas en B' .

Para calcular $M(f, B, B_2^*)$ hallaremos las coordenadas de $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$ respecto de la base B_2^* .

$f(e_1) = (1, -1, 0)$ tendrá por coordenadas en B_2^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de $f(e_2) = (0, 1, 0)$ en B_2^* serán

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y por último, las de $f(e_3) = (1, 0, 0)$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $M(f, B, B_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

vii) Hallamos las coordenadas de $f(e'_1) = (1, -1, 0)$ en B_2^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora las coordenadas de $f(e'_2) = (-1, 2, 0)$ en B_2^*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos lo mismo con $f(e'_3) = (0, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $M(f, B_1^*, B_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Clasificar el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(e_1) = ae_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$ y $f(e_3) = e_1 + be_2 + e_3$ según los valores de a y b .

SOLUCIÓN:

La matriz del endomorfismo f en la base B es

$$M(f, B, B) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un sistema de generadores de $\text{Im } f$ es $S = \{(a, 1, 1), (1, 1, 1), (1, b, 1)\}$. Un sistema equivalente a S puede ser $S' = \{(1, 1, 1), (a-1, 0, 0), (0, b-1, 0)\}$. Distinguimos los casos siguientes

- $a \neq 1$ y $b \neq 1$, entonces S es libre, ya que $\dim L(S) = \dim L(S') = 3$. En este caso, $\dim \text{Im } f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ y f es sobreyectivo. Además, $\dim \text{Ker } f = 0$ y f es inyectivo. Por lo tanto, f es un automorfismo.
- $a = 1$ y $b \neq 1 \Rightarrow B_{\text{Im } f} = \{(1, 1, 1), (1, b, 1)\}$ es una base de $\text{Im } f$, $\dim \text{Im } f = 2$ y f no es sobreyectivo. Además, $\dim \text{Ker } f = 1$ y f no es inyectivo.
- $a \neq 1$ y $b = 1$ es un caso análogo al anterior, f no es inyectivo y tampoco sobreyectivo.
- $a = 1$ y $b = 1$, $B_{\text{Im } f} = \{(1, 1, 1)\}$, $\dim \text{Im } f = 1$ y f no es sobreyectivo. Además, $\dim \text{Ker } f = 2$ y f no es inyectivo.

14. Se definen los homomorfismos f y g de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ con } f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, 0, x_1) \\ g: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ donde } g(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 + y_4, y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Se pide

- Matriz asociada a f en las bases canónicas B_c^3 y B_c^4 . Rango de f .
- Matriz asociada a g en las bases canónicas B_c^4 y B_c^2 . Rango de g .
- Matriz asociada a $g \circ f$.
- Núcleo de $g \circ f$.

SOLUCIÓN:

i) Las ecuaciones del homomorfismo f son

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 - x_3 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = x_1 \end{cases}$$

cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$M(f, B_c^3, B_c^4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$S = \{(1, 1, 0, 1), (-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0)\}$ es un sistema de generadores libre de $\text{Im } f$, luego $\dim \text{Im } f = 3$ y el rango de f es 3.

ii) Siendo (z_1, z_2) las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^2$ las ecuaciones del homomorfismo g las podemos escribir como

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_4 \\ z_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$M(g, B_c^4, B_c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$S = \{(1, 1), (0, -1), (1, 0)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im } g$, por tanto, el conjunto $T = \{(0, -1), (1, 0)\}$ es una base de $\text{Im } g$, $\dim \text{Im } g = 2$ que es el rango de g .

iii) La matriz asociada a $g \circ f$ es el producto de las matrices $B \cdot A$

$$M(g \circ f, B_c^3, B_c^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) $\text{Ker}(g \circ f)$ viene dado por los vectores solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de $\text{Ker}(g \circ f)$; haciendo $\lambda = 1$ se tiene que $\{(1, 2, 2)\}$, es una base del $\text{Ker}(g \circ f)$, y unas ecuaciones implícitas pueden ser

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$$

•

15. Se consideran 3 espacios vectoriales A , B y C , cuyas bases respectivas son $B_A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_B = \{u_1, u_2\}$ y $B_C = \{c_1, c_2, c_3\}$ y dos homomorfismos

$$f: A \longrightarrow B \equiv \begin{cases} f(e_1) = u_1 - u_2 \\ f(e_2) = u_2 \\ f(e_3) = 2u_2 \end{cases} \quad g: B \longrightarrow C \equiv \begin{cases} g(u_1) = c_1 - c_2 + 2c_3 \\ g(u_2) = c_1 - c_2 \end{cases}$$

Se pide

- i) Matriz del homomorfismo $h = g \circ f: A \rightarrow C$.
- ii) Encontrar el conjunto $h^{-1}\{(1, 1, 1)\}$, donde $(1, 1, 1) \in C$.
- iii) Núcleo de h .
- iv) Imagen mediante h del subespacio intersección de los subespacios de A siguientes

$$V_1 = \begin{cases} x_1 = 2\lambda + \beta \\ x_2 = \lambda - \beta \\ x_3 = -\lambda \end{cases} \quad V_2 = x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

SOLUCIÓN:

- i) La matriz F de f es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz G de g es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz H de $h = g \circ f$ será

$$H = G \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ii) $h^{-1}\{(1, 1, 1)\}$ es el conjunto de vectores (x_1, x_2, x_3) de A que se transforman en $(1, 1, 1)$ mediante h ; por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 = 1 \end{cases}$$

No hay ningún vector que satisfaga simultáneamente las dos primeras ecuaciones por tanto $h^{-1}\{(1, 1, 1)\} = \emptyset$.

- iii) El núcleo de h es la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = -\lambda \end{cases}$$

- iv) Eliminando λ y β en las ecuaciones paramétricas de V_1 , esto es, haciendo $\lambda = -x_3$, $\beta = -x_2 - x_3$, y sustituyendo en x_1 , obtenemos que la ecuación implícita de V_1 es $x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$.

Un vector de $V_1 \cap V_2$ satisfará las dos ecuaciones de V_1 y V_2 , es decir

$$V_1 \cap V_2 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

de donde $x_3 = 2\lambda$, $x_1 = -5\lambda$, $x_2 = -\lambda$.

Esto es, un vector de $V_1 \cap V_2$ es de la forma $(-5\lambda, -\lambda, 2\lambda)$ y una base de la misma es $(5, 1, -2)$.

Para obtener el subespacio transformado de $V_1 \cap V_2$, calculamos un sistema de generadores de $h(V_1 \cap V_2)$, que será $h(5, 1, -2)$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Por tanto, una base de $h(V_1 \cap V_2)$ es $(-3, 3, 10)$ y unas ecuaciones paramétricas de $h(V_1 \cap V_2)$ son

$$\begin{cases} x_1 = -3\lambda \\ x_2 = 3\lambda \\ x_3 = 10\lambda \end{cases}$$

Tema 11. Aplicaciones Lineales

Unas ecuaciones implícitas de dicho subespacio pueden ser

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_3 - 10x_2 &= 0 \end{cases}$$



18. Sea $P_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Sea $f: P_3(x) \rightarrow P_3(x)$ definida por $f[p(x)] = \beta p(x) + p'(x)$ con $\beta \in \mathbb{R}$.
- Probar que f es una aplicación lineal.
 - Hallar $N(f)$ e $\text{Im } f$ según los valores de β .
 - Suponiendo $\beta = 1$, hallar la matriz asociada a f , cuando se considera en $P_3(x)$ la base $B = \{2, x+1, x^2-1, x^3+1\}$, tanto en el espacio de partida como en el de llegada.

SOLUCIÓN:

- i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall p(x), q(x) \in P_3(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} f[\lambda p(x) + \mu q(x)] &= \beta[\lambda p(x) + \mu q(x)] + \lambda p'(x) + \mu q'(x) \\ &= \beta \lambda p(x) + \lambda p'(x) + \mu \beta q(x) + \mu q'(x) \\ &= \lambda[\beta p(x) + p'(x)] + \mu[\beta q(x) + q'(x)] = \lambda f[p(x)] + \mu f[q(x)] \end{aligned}$$

Por tanto, f es una aplicación lineal.

- ii) Consideremos en $P_3(x)$ la base canónica $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$ y calculamos las coordenadas de las imágenes de sus elementos.

- $f(1) = \beta$, cuyas coordenadas en B_c son $(\beta, 0, 0, 0)$.
- $f(x) = \beta x + 1$, cuyas coordenadas en B_c son $(1, \beta, 0, 0)$.
- $f(x^2) = \beta x^2 + 2x$, cuyas coordenadas en B_c son $(0, 2, \beta, 0)$.
- $f(x^3) = \beta x^3 + 3x^2$, cuyas coordenadas en B_c son $(0, 0, 3, \beta)$.

Por lo tanto, la matriz de f en la base canónica será

$$M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$S = \{(\beta, 0, 0, 0), (1, \beta, 0, 0), (0, 2, \beta, 0), (0, 0, 3, \beta)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im } f$.

Si $\beta \neq 0$ entonces el sistema es libre, como se ve inmediatamente; por lo tanto, $\dim \text{Im } f = 4$, luego $\text{Im } f = P_3(x)$ y $\text{Ker } f = \{0\}$, es decir, f es biyectiva.

Si $\beta = 0$, $S' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0)\}$ es una base de $\text{Im } f$ por ser un sistema libre de generadores. En este caso, $\dim \text{Im } f = 3$ y $\dim \text{Ker } f = 1$; por tanto, f no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

Unas ecuaciones paramétricas de $\text{Im } f$ serán

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\mu \\ z = 3\rho \\ t = 0 \end{cases}, \quad \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$$

El número de ecuaciones implícitas es $4 - 3 = 1$, por tanto, $t = 0$ es una ecuación implícita de $\text{Im } f$.

El núcleo viene dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas del $\text{Ker } f$ y $(1, 0, 0, 0)$ es una base del $\text{Ker } f$, el cual tiene $4 - 1 = 3$ ecuaciones implícitas independientes, que pueden ser

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$S = \{(\beta, 0, 0, 0), (1, \beta, 0, 0), (0, 2, \beta, 0), (0, 0, 3, \beta)\}$ es un sistema de generadores de $\text{Im } f$.

Si $\beta \neq 0$ entonces el sistema es libre, como se ve inmediatamente; por lo tanto, $\dim \text{Im } f = 4$, luego $\text{Im } f = P_3(x)$ y $\text{Ker } f = \{0\}$, es decir, f es biyectiva.

Si $\beta = 0$, $S' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0)\}$ es una base de $\text{Im } f$ por ser un sistema libre de generadores. En este caso, $\dim \text{Im } f = 3$ y $\dim \text{Ker } f = 1$; por tanto, f no es ni sobreyectiva ni inyectiva.

Unas ecuaciones paramétricas de $\text{Im } f$ serán

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\mu \\ z = 3\rho \\ t = 0 \end{cases}, \quad \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$$

El número de ecuaciones implícitas es $4 - 3 = 1$, por tanto, $t = 0$ es una ecuación implícita de $\text{Im } f$.

El núcleo viene dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas del $\text{Ker } f$ y $(1, 0, 0, 0)$ es una base del $\text{Ker } f$, el cual tiene $4 - 1 = 3$ ecuaciones implícitas independientes, que pueden ser

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

19. Se dan los espacios vectoriales $P_3(x)$ y $M_{2 \times 2}$ con las bases canónicas $B_c = \{x^3, x^2, x, 1\}$ y

$$B_c^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se considera el homomorfismo $f: P_3(x) \rightarrow M_{2 \times 2}$ definido por

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide

- i) Matriz del homomorfismo en las bases citadas.
- ii) Ecuaciones implícitas del subespacio imagen.
- iii) Calcular una base del núcleo.

SOLUCIÓN:

i) Necesitamos las coordenadas de $f(x^3)$, $f(x^2)$, $f(x)$ y $f(1)$ en la base B_c^* .

- $f(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene por coordenadas $(1, 0, 0, 0)$ en B_c^* .

- $f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene por coordenadas $(0, 1, -1, 0)$ en B_c^* .

- $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene por coordenadas $(0, 0, 1, 0)$ en B_c^* .

- $f(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene por coordenadas $(0, -1, 0, 0)$ en B_c^* .

Por lo tanto,

$$M(f, B_c, B_c^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ii) Un sistema libre de generadores de $\text{Im } f$ es $S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0)\}$; por tanto, una base de $\text{Im } f$ será $B_{\text{Im } f} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ y unas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = -\mu + \rho \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}.$$

El número de ecuaciones implícitas de $\text{Im } f$ es $4 - 3 = 1$ y $x_4 = 0$ es una ecuación implícita de $\text{Im } f$.

- iii) $\dim \text{Ker } f = 1$ y $\text{Ker } f$ es la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

siendo entonces $\{(0, 1, 1, 1)\}$ una base del $\text{Ker } f$.

20. Se considera el endomorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma

- El núcleo del endomorfismo es el subespacio vectorial de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

- Los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ se transforman en sí mismos.

Se pide

- Matriz del endomorfismo en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
- Dado el subespacio de ecuaciones implícitas

$$V \equiv \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ t = 0 \\ x - y + 2t = 0 \end{cases}$$

hallar unas ecuaciones paramétricas de su imagen.

- Matriz del endomorfismo en la base

$$B^* = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}.$$

SOLUCIÓN:

- Para obtener la matriz $M(f, B_c, B_c)$ necesitamos las imágenes de los vectores de B_c , $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ y $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Sabemos que $f(1, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 0)$ y que $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$. Además el núcleo viene dado por

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = 0 \end{cases}$$

que son unas ecuaciones paramétricas de $\text{Ker } f$ y una base de dicho subespacio es

$$B_{\text{Ker } f} = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\};$$

luego, $f(-1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$ y $f(-1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Por tanto, tenemos las imágenes de los vectores de una base

$$B = \{(1, 1, 1, 0) = v_1, (0, 0, 0, 1) = v_2, (-1, 1, 0, 0) = v_3, (-1, 0, 1, 0) = v_4\},$$

Si llamamos $c_1 = f(v_1)$, $c_2 = f(v_2)$, como $f(v_3) = 0$ y $f(v_4) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} c_1 &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ c_2 &= f(e_4) \\ 0 &= -f(e_1) + f(e_2) \\ 0 &= -f(e_1) + f(e_3) \end{aligned}$$

De donde se deduce, al ser $c_1 = (1, 1, 1, 0)$ y $c_2 = (0, 0, 0, 1)$ que

$$f(e_4) = (0, 0, 0, 1), \quad f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Luego,

$$M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) El subespacio V está contenido en $\text{Ker } f$, ya que

$$V = L\{(1, 1, -2, 0)\} \text{ y } (1, 1, -2, 0) \in \text{Ker } f;$$

por tanto, $f(V) = \{0\}$ y unas ecuaciones paramétricas de $f(V)$ son $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

iii) Para hallar $M(f, B^*, B^*)$ necesitamos conocer las coordenadas de las imágenes de los vectores de B^* en B^* .

La expresión matricial del endomorfismo en la base B_c es

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Hallaremos las imágenes de los vectores de B^* en B_c .

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(0, 1, 1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(0, 0, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$$

Calculamos ahora las coordenadas de los vectores imágenes en B^*

- $f(1, 1, 1, 1)$ tiene coordenadas $(1, 0, 0, 0)$ en B^* .

- $f(0, 1, 1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \frac{2}{3}(1, 1, 1, 1) + 0(0, 1, 1, 1) + 0(0, 0, 1, 1) + \frac{1}{3}(0, 0, 0, 1),$

luego tiene coordenadas $\left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$ en B^* .

$$- f(0,0,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}(1,1,1,1) + 0(0,1,1,1) + 0(0,0,1,1) + \frac{2}{3}(0,0,0,1),$$

luego tiene coordenadas $\left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$ en B^* .

$$- f(0,0,0,1) = (0,0,0,1) \text{ tiene coordenadas } (0,0,0,1) \text{ en } B^*.$$

$$\text{Por lo tanto } M(f, B^*, B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Se consideran los espacios vectoriales E , F y G siendo E el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 1 ($E = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$), F las matrices simétricas de orden 2 y $G = \mathbb{R}^3$.

Se definen las aplicaciones lineales $f: E \rightarrow F$ y $g: F \rightarrow G$ de la forma

$$f(ax + b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad g \begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix} = (a, c, a + c)$$

Sean $B = \{x, 1\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B'' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ las bases canónicas de E , F y G . Se pide

- Matrices de los homomorfismos f , g y $g \circ f$ en las bases anteriores.
- Calcular el subespacio transformado por $g \circ f$ del subespacio $V \subset E$ siendo V el subespacio $V = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$.
- Si en F utilizamos la base $B'_* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, hallar las matrices de f , g y $g \circ f$ en las bases B , B'_* y B'' .

SOLUCIÓN:

$$\text{i) } f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1) \text{ en la base } B'. \quad f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0) \text{ en la base } B'.$$

$$\text{Por tanto, } A = M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1) \quad g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0) \quad g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1,1)$$

$$\text{Por tanto, } C = M(g, B', B'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M(g \circ f, B, B'') = C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ii) Un sistema de generadores de V es el vector $(1,1)$. Entonces, un sistema de generadores del subespacio transformado $g \circ f(V)$ será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $(1,1,2)$ es una base de $g \circ f(V)$.

$$\text{iii) } f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1,0,0) \text{ en la base } B'_*. \quad f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv (0,1,0) \text{ en la base } B'_*.$$

$$\text{Por lo tanto, } A' = M(f, B, B'_*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 2) \quad g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \quad g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1, -1, 0)$$

Entonces, $C' = M(g, B', B'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de $g \circ f$ será $C' \cdot A'$, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coincide con la calculada previamente, ya que ni en E ni en G se ha realizado un cambio de base.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sean dos espacios vectoriales E y F . Estudiar qué aplicaciones de las siguientes son homomorfismos.

- i) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = \lambda_0 x$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, λ_0 fijo.
- ii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = x_0 - x$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo.
- iii) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, 1, x_2)$, siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$.
- iv) $E = F = \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)$, siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$.
- v) $E = F = M_{n \times n}$, $f(A) = \frac{A - A'}{2}$.
- vi) $E = F = P_3(\mathbb{R})$, $f[p(x)] = \frac{\int_0^x p(t) dt}{x} + p'(x)$.

2. Se consideran las aplicaciones

- a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.
- b) $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.
- i) Demostrar que son aplicaciones lineales.
- ii) Calcular su núcleo y su imagen.
- iii) Siendo el subespacio $V = L\{(1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$, calcular $f(V)$ y $g(V)$. Calcular también $f^{-1}(\{(0, 0, 0)\})$ y $f^{-1}(\{(2, 2, 1)\})$.
- iv) Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = 3\lambda, x_2 = 2\lambda, x_3 = \lambda\}$.

13. Se considera el homomorfismo entre espacios vectoriales $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido de la forma $f(1, 3, 5) = (1, 0)$, $f(0, 1, 1) = (1, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (0, 0)$.

- i) Hallar la matriz del homomorfismo en las bases canónicas.
- ii) Hallar las ecuaciones implícitas del subespacio transformado del de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

14. Se considera el homomorfismo de espacios vectoriales $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido de la forma $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$. Se pide

- i) Ecuaciones paramétricas del núcleo de f e implícitas de la imagen de f .
- ii) Hallar la matriz de f respecto de las bases $\{(1, 2), (2, 0)\}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

15. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Se define el endomorfismo f que verifica las condiciones siguientes: f^2 es el endomorfismo nulo, y los vectores $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 0)$ se transforman, respectivamente, en los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0, 0)$.

Calcular la matriz del endomorfismo en la base canónica, así como el núcleo y la imagen.

16. Se considera la familia de endomorfismos f_a cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de a para los cuales f_a no es automorfismo. Para dichos valores calcular $\text{Ker } f_a$ e $\text{Im } f_a$.

17. Sean los espacios vectoriales E , F y G referidos respectivamente a las bases

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$\{s_1, s_2\}$$

$$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

Se consideran los homomorfismos $f: E \rightarrow F$ y $g: F \rightarrow G$ definidos de forma que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 4s_1 + s_2 & f(e_2) &= 2s_1 & f(e_3) &= s_1 + 2s_2 & f(e_4) &= s_1 + s_2 \\ g(s_1) &= c_1 + 2c_2 + c_3 & g(s_2) &= c_2 + c_3 + c_4 \end{aligned}$$

Se pide

- Obtener el transformado del vector $u = (-1, 2, 1, -1)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, mediante el homomorfismo $h = g \circ f$. A la vista del resultado, estudiar si h es inyectivo.
 - Hallar unas ecuaciones implícitas del núcleo y de la imagen de h respecto de las bases dadas. Obtener también una base para el núcleo y otra para la imagen de h .
18. Sean los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$. Para cada valor real del parámetro λ se define el homomorfismo $f_\lambda: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, por $f_\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1 + x_2, x_1 + \lambda x_3, x_2 + x_4)$. Se pide
- Valores de λ para los cuales f_λ es inyectivo.
 - Valores de λ para los cuales f_λ es sobreyectivo.
 - Calcular una base del núcleo de f_λ para $\lambda = 2$.
 - Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Calcular las ecuaciones implícitas de $f_\lambda(V)$ para $\lambda = 0$.
 - Calcular la matriz de f_λ cuando $\lambda = 1$, la base de $\mathbb{R}^4$ es la canónica y la de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.

19. Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Se define entre ellos la familia de homomorfismos $f_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma

$$a) \text{ Las ecuaciones implícitas de } \text{Ker } f_a \text{ son } \begin{cases} x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

$$b) f_a(0, 0, a-1) = (0, a-1) \text{ y } f_a(1, 0, 1) = (2, 1).$$

Se pide

- Calcular la matriz de los homomorfismos cuando las bases consideradas son las canónicas y a es un número real arbitrario.
- Ecuaciones paramétricas del transformado del subespacio cuya ecuación implícita corresponde a $x + y + z = 0$.
- Para $a = 1$ encontrar, si existen, los vectores que se transforman en los vectores $(2, 1)$ y $(2, 3)$.
- Rango de f .

22. Sea $f_a: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 0 & -a \\ 3 & 2+2a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrar que existe un subespacio V de $\mathbb{R}^4$ con $V \neq \mathbb{R}^4$ que contiene a $\text{Im } f_a, \forall a \in \mathbb{R}$.

23. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno, con las operaciones usuales: $V = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea f el endomorfismo de V que verifica las condiciones siguientes

- $f(1+x) = 2-x$.
- El núcleo de f coincide con la imagen, es decir, $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

Se pide

- Matriz del endomorfismo f en la base $B = \{1, x\}$.
- Calcular una base de $f(W)$ siendo W el subespacio de ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$, donde (x_1, x_2) son coordenadas en la base B .
- Imagen inversa del conjunto $\{(1, 1), (0, 0)\}$.

24. Se consideran $A = \mathbb{R}_2[x]$ y $C = \mathbb{R}_2[x]$, siendo $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos. Sea $f: A \rightarrow C$ el homomorfismo definido por las condiciones siguientes

- Los polinomios $p(x)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ sin término independiente se transforman en sí mismos,
- El núcleo de f es el subespacio de los polinomios de $\mathbb{R}_2[x]$ que tienen los tres coeficientes iguales.

Se pide

- Matriz del homomorfismo f en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, $B = \{1, x, x^2\}$.
- Base del subespacio transformado del subespacio de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda - 2\mu + \rho \\ y = \lambda - 2\mu + \rho \\ z = \lambda - 2\mu \end{cases}$$

- Matriz del homomorfismo f considerando en A la base $B' = \{1+x+x^2, 1+x, 1\}$ y en C la base canónica $B = \{1, x, x^2\}$.

25. Sean $S_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden tres y $A_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ el de las matrices antisimétricas de orden tres. Se considera el homomorfismo f de $S_{3 \times 3}$ en $A_{3 \times 3}$ definido por las condiciones siguientes

- El núcleo está formado por las matrices diagonales.

$$b) f \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide

- Calcular la matriz del homomorfismo cuando la base en $S_{3 \times 3}$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y en $A_{3 \times 3}$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Encontrar en $S_{3 \times 3}$ un subespacio de dimensión cuatro que se transforme mediante f en uno de dimensión dos.
- Estudiar si el homomorfismo es o no epimorfismo.

Tema 11. Aplicaciones Lineales

27. En el espacio vectorial E de las funciones reales de variable real se considera el subconjunto

$$V = L\{e^x, e^{-x}, 1, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$$

Sea la aplicación $f: V \longrightarrow V$ definida por $f[h(x)] = h'(x)$. Demostrar que es homomorfismo. Calcular su núcleo e imagen.

BIBLIOGRAFÍA

De La Villa, A.; 'Problemas de álgebra con esquemas teóricos'. CLAGSA 1998.