Derivadas I

Introducción

Con este capítulo se inicia el estudio del importante concepto de Derivada, fundamental en todo el Análisis Matemático y con infinidad de aplicaciones.

Empezaremos viendo las definiciones y resultados generales de la derivada y la diferencial y nos apoyaremos en la idea geométrica de tangente. La propiedad de la tangente a una curva en un punto de ser la recta que mejor aproxima a la curva en un entorno del punto en cuestión, permite en algunos problemas la sustitución de la función original por su recta tangente. Esta idea se utilizará en evaluación aproximada.

El capítulo terminará con la introducción de la función derivada y de las derivadas sucesivas.

1. Derivada y diferencial en un punto

1.1. Definición. Derivada en un punto

Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, y un punto $a \in \mathring{A}$, se dice que f es derivable en a si existe y es real el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Al valor de ese límite se le denomina derivada de f en el punto a y se denota por $f'(a)$

NOTAS:

1) Se puede definir de modo equivalente

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2) El cociente $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *mide la variación de la función respecto de la variación de la variable, por tal motivo a* $f'(a)$ *se le denomina coeficiente de variación de* f *o simplemente razón de cambio de la función* f *en el punto* a.

3) Sólo se ha dado la definición de derivada para puntos interiores al dominio, aunque se podría haber dado una más general, por ejemplo exigiendo sólo que el punto sea de acumulación.

1.2. Definición. Derivadas laterales

Sea f una función real de variable real

a) Si f está definida en un intervalo a la derecha de a (de la forma $[a, a+\varepsilon)$), al número

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en caso de existir, se le denomina derivada por la derecha de f en a.

b) Análogamente, si f está definida en un intervalo a la izquierda de a (de la forma $(a-\varepsilon, a]$), al número

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en caso de existir, se le denomina derivada por la izquierda de f en a.

1.3. Proposición.

La derivada $f'(a)$ de una función f en un punto a existe si y sólo si existen las derivadas laterales y coinciden.

NOTAS:

1. *La obtención de las derivadas laterales se hace imprescindible para estudiar la derivabilidad de f en a, cuando la función f está definida de modo diferente a la izquierda y a la derecha del punto a.*
2. *Hay que hacer notar que la derivada de una función en un punto, cuando existe, no es más que un número, que mide la variación de la función respecto de la variable en ese punto.*

1.4. Definición. Tangente y normal a una curva

Se define la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a, como la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$.

La ecuación de la recta tangente a f en a es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

La recta perpendicular a la tangente en el punto $(a, f(a))$ es la normal a la curva en dicho punto.

La ecuación de la normal a f en a, si $f'(a) \neq 0$, es

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

En el caso $f'(a) = 0$ la ecuación de la normal es $x = a$.

1.5. Interpretación geométrica

Según la definición anterior, la derivada de f en a es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a. Esto es razonable, dado que es el límite, cuando $h \to 0$, de la pendiente de la recta secante a la curva, que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$.

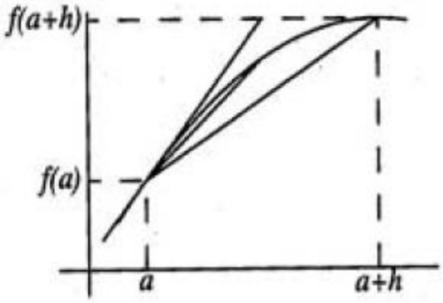

Fig. 7.1

Si no existe derivada de f en el punto a, la curva $y = f(x)$ no tiene tangente en el punto a, salvo cuando la no existencia de derivada se deba a que

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| = \infty$$

en cuyo caso hay una recta vertical (con pendiente infinita) que juega un papel análogo al de la tangente (véase figura 7.2).

NOTA: *Obsérvese el diferente comportamiento de las gráficas de dicha figura en los puntos "conflictivos".*

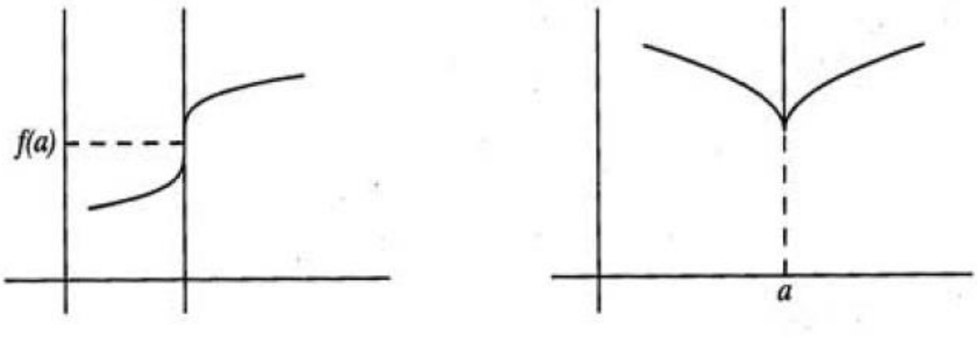

Fig. 7.2

Si en un punto a en el que la función es continua se tienen derivadas laterales finitas y distintas, la gráfica de f presenta un "pico" en el punto a y se suele decir que $(a, f(a))$ es un punto anguloso (ver figura 7.3).

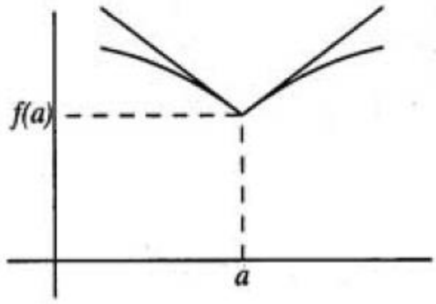

Fig. 7.3

Si $f'(a) = 0$, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a es una recta horizontal (figura 7.4).

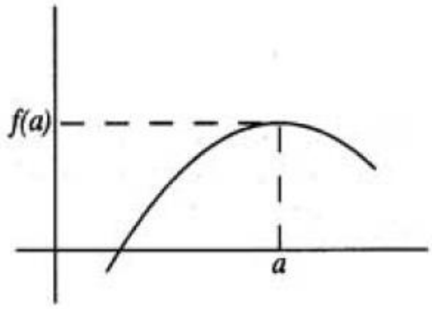

Fig. 7.4

1.6. Teorema. Derivabilidad y continuidad

Si una función f es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

NOTAS:

1) *El recíproco de este resultado no es cierto. Por ejemplo la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y no es derivable en ese punto.*
2) *Se puede dar una versión más general del teorema anterior cambiando la hipótesis de f derivable en a, por f con derivadas laterales en a.*

1.7. Definición. Diferencial en un punto

Dada una función f derivable en un punto a, se llama diferencial de f en el punto a a la aplicación lineal

$$\begin{aligned} df(a) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(a) \cdot x \end{aligned}$$

Suele denotarse, y a partir de ahora así lo haremos, por dx a la variable de la aplicación lineal diferencial y se suele escribir:

$$df(a)(dx) = df(a, dx) = f'(a)dx$$

1.8. Interpretación geométrica

La diferencial de una función f en a es la aplicación lineal que mejor aproxima a $f(x) - f(a)$ en los alrededores del punto a.

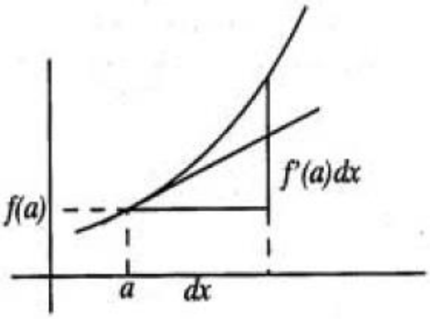

Fig. 7.5

Si $y = f(x)$ el incremento de y cerca del punto a es, aproximadamente, $dy = f'(a)dx$.

La aproximación lineal que proporciona la diferencial significa en definitiva aproximar la curva $y = f(x)$ por su tangente en el punto a.

1.9. Teorema.

Si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, cuando $dx \to 0$ los infinitésimos $f(a + dx) - f(a)$ y $f'(a)dx$ son equivalentes.

2. Propiedades de la derivada

Tabla de derivadas

$f = k \cdot u$ $\qquad$ $f' = k \cdot u'$

$f = u \pm v$ $\qquad$ $f' = u' \pm v'$

$f = k \cdot u \pm c \cdot v$ $\qquad$ $f' = k \cdot u' \pm c \cdot v'$

Regla del Producto:

$f = u \cdot v$ $\qquad$ $f' = u \cdot v' + v \cdot u'$

Regla del Cociente:

$f = \dfrac{u}{v}$ $\qquad$ $f' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la Potencia:

$f = v^n$ $\qquad$ $f' = n \cdot v^{n-1} \cdot v'$

$f = k \cdot v^n$ $\qquad$ $f' = k \cdot n \cdot v^{n-1} \cdot v'$

Funciones Exponenciales:

$f = e^u$ $\qquad$ $f' = e^u \cdot u'$

$f = a^u$ $\qquad$ $f' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$

Funciones Logarítmicas:

$f = \ln(u)$ $\qquad$ $f' = \dfrac{u'}{u}$

$f = \log_a(u)$ $\qquad$ $f' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln(a)}$

Una Función elevada a otra Función:

$f = u^v$ $\qquad$ $f' = u^v \left[v' \cdot \ln(u) + \dfrac{v \cdot u'}{u} \right]$

Funciones Trigonométricas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{sen}(u)$	$f' = \cos(u) \cdot u'$
$f = \cos(u)$	$f' = -\operatorname{sen}(u) \cdot u'$
$f = \tan(u)$	$f' = \sec^2(u) \cdot u'$
$f = \csc(u)$	$f' = -\csc(u)\cot(u) \cdot u'$
$f = \sec(u)$	$f' = \sec(u)\tan(u) \cdot u'$
$f = \cot(u)$	$f' = -\csc^2(u) \cdot u'$

Funciones Hiperbólicas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{senh}(u)$	$f' = \cosh(u) \cdot u'$
$f = \cosh(u)$	$f' = \operatorname{senh}(u) \cdot u'$
$f = \tanh(u)$	$f' = \operatorname{sech}^2(u) \cdot u'$
$f = \operatorname{csch}(u)$	$f' = -\operatorname{csch}(u)\coth(u) \cdot u'$
$f = \operatorname{sech}(u)$	$f' = -\operatorname{sech}(u)\tanh(u) \cdot u'$
$f = \coth(u)$	$f' = -\operatorname{csch}^2(u) \cdot u'$

Funciones Trigonométricas Inversas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{arc\,sen}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,;\quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \operatorname{arc\,cos}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,;\quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \arctan(u)$	$f' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$f = \operatorname{arccsc}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$f = \operatorname{arcsec}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$
$f = \operatorname{arccot}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{1+u^2}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$

Funciones Hiperbólicas Inversas:

Función:	Su Derivada:
$f = \operatorname{arcsenh}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$f = \operatorname{arccosh}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$
$f = \operatorname{arctanh}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{1-u^2}\,;\quad \lvert u\rvert < 1$
$f = \operatorname{arccsch}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}\,;\quad u \neq 0$
$f = \operatorname{arcsech}(u)$	$f' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}\,;\quad 0 < u < 1$
$f = \operatorname{arccoth}(u)$	$f' = \dfrac{u'}{1-u^2}\,;\quad \lvert u\rvert > 1$

2.6. Corolario. Derivadas logarítmicas

Para derivar una función del tipo $h(x) = (f(x))^{g(x)}$ con f y g derivables en a y $f(x) > 0$ en un entorno de a, se puede tomar logaritmos y derivar usando la regla de la cadena y la derivada del producto, obteniendo

$$\log(h(x)) = g(x)\log(f(x))$$

Derivando en ambos miembros y despejando $h'(a)$ se obtiene

$$h'(a) = \left(g'(a)\log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}\right)(f(a))^{g(a)}$$

2.7. Corolario. Derivada de una función expresada en paramétricas

Dada una función $y(x)$ cuya gráfica se puede expresar, en un entorno de x_0, en coordenadas paramétricas por

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

con $x(t_0) = x_0$, entonces, si x es derivable en t_0 e y es derivable en x_0, se verifica que $y'(t_0) = y'(x_0) \cdot x'(t_0)$, de donde se obtiene que si $x'(t_0) \neq 0$ es

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

3. Función derivada. Derivadas sucesivas

3.1. Definición. Función derivable en un conjunto

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Y sea f una función definida en A. Se dice que f es derivable en A si lo es en todos sus puntos.

3.2. Definición. Función derivada

Sea f una función derivable en un conjunto A. La función que en cada punto $x \in A$ toma el valor $f'(x)$ se denomina función derivada de f y se denota por f'.

3.4. Definición. Derivada segunda

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$ un punto tal que f es derivable en un entorno de a.
La función f' puede ser a su vez derivable en el punto a, basta que exista el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

A este límite, si existe y es finito, se le llama derivada segunda de f en a y se escribe

$$f''(a) = f''(x)_{x=a} = D^2 f(x)_{x=a} = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x=a}$$

3.5. Definición. Función derivada segunda

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que para todo $x \in A$ existe $f''(x)$; entonces, a la función

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f''(x) \end{aligned}$$

se le llama función derivada segunda de f, y se denota por f''.

3.6. Definición. Derivadas sucesivas

De modo análogo se puede definir las derivadas terceras, cuartas, ... y en general la derivada n-ésima $f^{(n}$:

Si f es una función $n-1$ veces derivable en un entorno de a, se define

$$f^{(n}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1}(a+h) - f^{(n-1}(a)}{h}$$

suponiendo que este límite exista y sea finito.

3.7. Definición.

Dado un intervalo (a,b) de $\mathbb{R}$, se define $C^n(a,b)$ como el conjunto de todas las funciones $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ que admiten derivada n-ésima en todo punto de (a,b) de modo que f^n es continua en (a,b).

Se define $C^\infty(a,b)$ como la clase de todas las funciones $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ que admiten derivadas de cualquier orden en todos los puntos de (a,b).

Observemos que las funciones polinómicas, exponenciales, seno y coseno pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R})$.

Cuando se escribe $C^n[a,b]$ se entiende que f es de clase C^n en un intervalo abierto que contiene a $[a,b]$.

3.8. Obtención de derivadas sucesivas

Algunas veces es preciso obtener una expresión general para la derivada n-ésima de una función. Esto puede ser muy fácil (por ejemplo, la derivada n-ésima de $f(x)=e^x$ es $f^{(n}(x)=e^x$) o extremadamente complicado. Para resolver este problema, en ocasiones se intuye cuál va a ser la expresión y luego se demuestra por inducción; otras veces se obtiene una ley recurrente que permita expresar $f^{(n}$ en función de $f^{(n-1}$, y casi siempre es útil la descomposición de la función dada como sumas o productos de funciones sencillas de derivar. En este contexto, es útil el siguiente resultado

3.9. Teorema. Fórmula de Leibniz

Dadas dos funciones, f y g, la derivada de orden n de la función producto fg verifica la igualdad

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg)(x) = \binom{n}{0} f^{(n}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1}(x)g'(x) + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-1} f'(x)g^{(n-1}(x) + \binom{n}{n} f(x)g^{(n}(x)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *¿Es derivable la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$*?*

SOLUCIÓN:

Tenemos que ver si existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$.

Pero

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

La función f sí es derivable en $x = 0$, y su derivada en ese punto vale 0; es decir, $f'(0) = 0$.

---

3. *Estudiar, en los puntos* $x = -1$ *y* $x = 0$ *la derivabilidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+1) & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En $x = -1$:

$$f'_+(-1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(-1+h)^2 + (2(-1)+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

$$f'_-(-1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(2(-1+h)+1) + (2(-1)+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2$$

Entonces f es derivable en -1 y $f'(-1) = -2$.

En $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 0}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - \operatorname{sen} 0}{h} = 0$$

luego no existe $f'(0)$.

---

5. *Determinar el ángulo que forman las curvas $y = x^2 - 1$, $y = x^3 - x$ en los puntos de corte.*

NOTA: *El ángulo que forman dos curvas es el ángulo que foman sus tangentes*

SOLUCIÓN:

Los puntos de corte de las curvas deben verificar $x^2 - 1 = x^3 - x$.
Factorizando el polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ se obtiene

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$$

luego los puntos de corte son $(1,0)$ y $(-1,0)$ (véase figura 7.6).

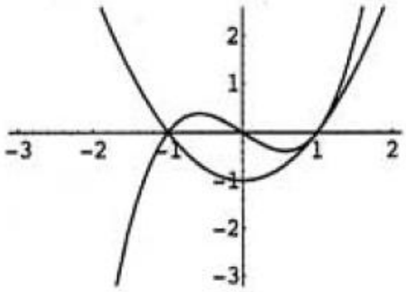

Fig. 7.6

- La tangente a $y = x^2 - 1$ en el punto $(1,0)$ tiene por pendiente 2 y por tanto es la recta $y = 2(x-1)$.
  La tangente a $y = x^3 - x$ en el punto $(1,0)$ tiene por pendiente 2 y es la recta $y = 2(x-1)$. Así, las dos curvas tienen la misma tangente y por tanto el ángulo que forman es 0.

- En el punto $(-1,0)$, la tangente a $y = x^2 - 1$ es la recta $y = -2(x+1)$, y la tangente a $y = x^3 - x$ es $y = 2(x+1)$
  Luego las pendientes de las dos rectas son opuestas y en consecuencia el ángulo que forman en principio sería $2 \operatorname{arctg} 2$. Pero este ángulo es mayor que $\frac{\pi}{2}$, o sea es el mayor de los dos ángulos que forman las rectas. El otro es $\pi - 2 \operatorname{arctg} 2$.

8. *Hallar la diferencial de la función $f(x) = \log x$ en $x = 1$ y usarla para obtener una aproximación de* $\log 0'9$.

SOLUCIÓN:

$f'(1) = 1$. La diferencial de f en 1 es la aplicación lineal identidad

$$df(1, dx) = 1 \cdot dx$$

Para aproximar $\log(0'9)$ usamos $f(1)$ más la evaluación de la aplicación lineal diferencial en $-0'1$:

$$f(0'9) \approx f(1) + 1 \cdot (-0'1) = -0'1$$

Obsérvese que $-0'1$ es precisamente el valor que toma para $x = 0'9$ la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$. Esto es lógico ya que al usar la diferencial lo que hacemos es aproximar la ordenada de la curva por la ordenada de la tangente.

---

9. *Si* $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$*, hallar*
   a) función derivada, calculando su expresión en la forma más simplificada posible,
   b) derivada en $x = \dfrac{\pi}{2}$*,*
   c) diferencial en $x = -\dfrac{3\pi}{2}$*,*
   d) ecuación de la tangente y de la normal a $f(x)$ *en* $x = 0$*.*

SOLUCIÓN:

a) La función derivada será:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x\,(1+\cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,(1+\cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x + 1}{2\cos x + 2} = \frac{1}{2}$$

b) Como $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ para todo x, también $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

c) $df\left(\dfrac{-3\pi}{2}, dx\right) = \dfrac{1}{2}dx$

d) $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$ luego la ecuación de la recta tangente será $y = \dfrac{x}{2}$.
   Y la de la normal, $y = -2x$.

11. *Calcular las derivadas de las funciones siguientes, simplificando sus expresiones:*

   a) $f(x) = 2x \operatorname{arctg}(2x) - \log\sqrt{1+4x^2}$ *b)* $g(x) = \log\left(\dfrac{2\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x + 2}\right)$

   c) $h(x) = (1+x)^{\log(1+x)}$ *d)* $j(x) = (a^2+x^2)^{\operatorname{arctg} x/a}$

SOLUCIÓN:

a) $f'(x) = 2\operatorname{arctg}(2x) + 2x\dfrac{2}{1+(2x)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{8x}{1+4x^2} = 2\operatorname{arctg}(2x)$.

b) Pasando del "logaritmo del cociente" a una "diferencia de logaritmos", y derivando después se obtiene

$$g'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)\left(\frac{2}{2\operatorname{tg} x+1} - \frac{1}{\operatorname{tg} x+2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\cos x}\left(\frac{2}{2\operatorname{sen} x+\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x+2\cos x}\right) =$$
$$= \frac{3}{2\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos^2 x} = \frac{3}{2+5\operatorname{sen} x\cos x}$$

c) Usamos derivación logarítmica:

$$\log h(x) = \log(1+x)\log(1+x) = \big(\log(1+x)\big)^2$$

Derivando la nueva función tenemos:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = 2\log(1+x)\frac{1}{1+x}$$

con lo que

$$h'(x) = \frac{2\log(1+x)}{1+x}(1+x)^{\log(1+x)}$$

d) Razonamos como en el apartado anterior:

$$\log j(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,\log(a^2+x^2)$$

y por tanto

$$\frac{j'(x)}{j(x)} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\log(a^2+x^2) + \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\frac{2x}{a^2+x^2}$$

$$j'(x) = \left(a\log(a^2+x^2) + 2x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)(a^2+x^2)^{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)-1}$$

———— • ————

14. *Hallar* $\frac{dy}{dx}$ *si* $y = \frac{u^2+3u}{u^2-1}$, $u = \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN:

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{(2u+3)(u^2-1) - 2u(u^2+3u)}{(u^2-1)^2}\cdot\cos x =$$
$$= \frac{(2\operatorname{sen} x+3)(\operatorname{sen}^2 x-1) - 2\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen}^2 x-1)^2}\cos x =$$

$$= \frac{(2\operatorname{sen} x + 3)(-\cos^2 x) - 2\operatorname{sen} x(\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x)}{\cos^3 x} =$$
$$= \frac{-2\operatorname{sen} x(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - 3(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - 3\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x} =$$
$$= \frac{-2\operatorname{sen} x - 3 - 3\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}$$

15. *Un balón se infla de tal forma que su volumen crece a razón de 36π cm^3/s. Hallar la variación del radio cuando $r = 3$ cm.*

SOLUCIÓN:

Al ser $V = \pi r^3$, consideremos V y r como función de t, $V(t)$ y $r(t)$. Derivando se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 12\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Como $\dfrac{dV}{dt} = 36\pi$ cm^3/s y $r = 3$ cm, se tiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{36\pi}{12\pi \cdot 9} = \frac{1}{3} \text{ cm/s}$$

Luego en ese momento el radio crece a razón de $\dfrac{1}{3}$ cm/s.

17. *Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \cos(2x+1)$, siendo $x = t^2 + 1$ y t el tiempo. ¿Con qué "rapidez" (velocidad) está desplazándose respecto a las direcciones vertical y horizontal cuando $t = 2$?*

SOLUCIÓN:

La velocidad de desplazamiento vertical será $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=2}$ y para calcularla aplicaremos la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = -2\operatorname{sen}(2x+1)$$
$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

de donde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left[-2\operatorname{sen}(2x+1)\right]2t = -4t\operatorname{sen}(2t^2+3)$$

Entonces

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=2} = -8\,\mathrm{sen}\,11$$

La velocidad de desplazamiento horizontal será $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=2} = 4$

---

18. *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

demostrar que f' es una función discontinua en $x = 0$.

SOLUCIÓN:

En el problema 1 se estableció la derivabilidad de f en 0 y que $f'(0) = 0$

Si $x \neq 0$, f es derivable ya que es producto de las funciones

- x^2, derivable por ser un polinomio y
- $\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$, derivable por ser composición de las funciones $\dfrac{1}{x}$, derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y $\mathrm{sen}\,x$, derivable en todo $\mathbb{R}$.

Podemos entonces aplicar las reglas de derivación y obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right) = 2x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Así

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f' no es continua en 0 ya que no existe $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

---

21. *Hallar $y''(0)$ para la función $y = y(x)$ dada por las ecuaciones paramétricas*

$$x = \log t$$
$$y = t^3$$

SOLUCIÓN:

Observemos que $x = 0$ se obtiene si y sólo si $t = 1$.

$$y'(t) = y'(x)x'(t)$$

de donde

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3$$

Derivando respecto a t en la anterior expresión se obtiene $y''(x)x'(t) = 9t^2$, y por tanto

$$y''(x) = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3$$

Entonces $y''(0) = 9$.

---

22. *Calcular la derivada de orden 25 de la función*

$$f(x) = x^2 e^x$$

SOLUCIÓN:

Observemos que se trata de calcular la derivada de orden 25 del producto de las funciones

$$h(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad k(x) = e^x$$

cuyas derivadas son

$$k^{(n}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$h'(x) = 2x, \quad h''(x) = 2, \quad h^{(n}(x) = 0 \quad \forall n \geq 3$$

Por la fórmula de Leibniz,

$$f^{(25}(x) = \binom{25}{0} h(x)k^{(25}(x) + \binom{25}{1} h'(x)k^{(24}(x) + \binom{25}{2} h''(x)k^{(23}(x)$$

ya que todos los demás sumandos de dicha fórmula son nulos. Luego

$$f^{(25}(x) = x^2e^x + 25 \cdot 2x \cdot e^x + \frac{25 \cdot 24}{2} 2e^x = e^x(x^2 + 50x + 600)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Estudiar si es derivable la función* $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ *en el punto* $x = 1$.

2. *Comprobar que la función* $f(x) = |x-1|$ *es continua en* $x = 1$ *pero no es derivable en dicho punto.*

3. *Estudiar la derivabilidad de* f *en los puntos* $x = -1$, $x = 2$ *y* $x = 3$ *siendo*

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{si } x < -1 \\ \operatorname{sen} \pi x & \text{si } x \in [-1, 2] \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in (2, 3) \\ \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

7. *a) Obtener la derivada de la función logaritmo a partir de la derivada de la función exponencial.*

   Obtener la derivada de la función coseno a partir de la de la función seno.

8. *Hallar un valor aproximado de* $\sqrt{4'1}$ *utilizando la tangente a la curva*

$$y = \sqrt{4+x}$$

   en el punto $x = 0$.

9. *Calcular aproximadamente* $\sqrt{1'05}$ *y* $e^{0'1}$ *utilizando diferenciales de las funciones adecuadas.*

10. *Un cilindro de* 4 *cm de radio* (r) *y* 3 *cm de altura* (h) *se somete a un proceso de calentamiento con el que varía sus dimensiones de tal forma que* $\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt} = 1$ *cm/s.*
    Hallar la variación de su volumen a los 5 *segundos y a los* 10 *segundos.*

11. *Hallar la función derivada de las siguientes funciones*

    a) $f(x) = \operatorname{tg}(1+x)^3$ *b)* $g(x) = \log_3(1+x)^2$ *c)* $h(x) = \operatorname{arcsen}\frac{1+x}{1-x}$

12. *Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función*

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 3 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \cos\frac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

13. *Probar que no es derivable en* $x = 0$ *la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

14. *Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar la función derivada correspondiente en los puntos donde exista*

    a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

    b) $g(x) = 2x + |x^2 - 2|$

15. *Sea* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable y tal que* $g(0) = g'(0) = 0$. *Definimos*

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que f *es derivable en* $x = 0$ *y calcular* $f'(0)$.

16. *Calcular las derivadas de las siguientes funciones tomando previamente logaritmos*

a) $f(x) = (x+1)(3x-1)(8x+7)$ *b)* $g(x) = (2+3x)^{\log(2+3x)}$

18. *Calcular* $\left(f'(x)+3\right)^2$ *siendo*

$$f(x) = \arccos(\operatorname{sen} 3x) + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

20. *Para cada una de las siguientes curvas, hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto* x_0 *indicado.*

a) $y = x^{\operatorname{sen} x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $y = (3-x^2)^4\sqrt[3]{5x-4}$, $x_0 = 1$.

c) $y = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.

21. *Determinar el ángulo que forman las curvas* $y = x^4+1$ *e* $y = 5x^2-3$ *en el punto* $x_0 = 1$.

22. *Dadas las curvas* $y = x^2+1$ *e* $y = -x^2$, *obtener las ecuaciones de las rectas que son simultánemente tangentes a ambas.*

25. *Hallar, en cada caso, la derivada de la función* $y = y(x)$ *dada por las ecuaciones paramétricas*

a) $\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\operatorname{sen} t \end{aligned}$ *b)* $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{t^2}{(1+t)^2}$

26. *Un punto se mueve en el plano siguiendo una trayectoria*

$$x = \operatorname{sen} t$$
$$y = t^2 - 1$$

a) Hallar la derivada de la función $y(x)$ *(es decir,* dy/dx*) para los puntos* $t = 0$ *y* $t = 2$.

b) Hallar la tangente a la trayectoria en el punto $(0, -1)$.

28. *Una partícula se mueve a lo largo de una parábola cuya ecuación es* $y = x^2$.
    a) *¿En qué punto de la curva varían la abscisa y la ordenada con el mismo coeficiente de variación?*
    b) *Encontrar esta razón si el movimiento es tal que en el instante* t *es*

$$x = \operatorname{sen} t \quad , \quad y = \operatorname{sen}^2 t.$$

29. *Hallar la derivada quinta de las siguientes funciones*
    a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$
    b) $g(x) = x^{27} e^x$
    c) $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

BLIOGRAFÍA

García, A.; García, F.; López, A.; Rodríguez, G.; De La Villa, A.; ''*Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable*''. Clagsa 1993.