Introducción

En este capítulo se definirá el concepto de integral de Riemann de una función acotada en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ por medio de sumas superiores e inferiores. Este concepto tiene su motivación básica en el cálculo de áreas de regiones planas. En particular se plantea el problema del cálculo del área para un trapecio curvilíneo de la forma

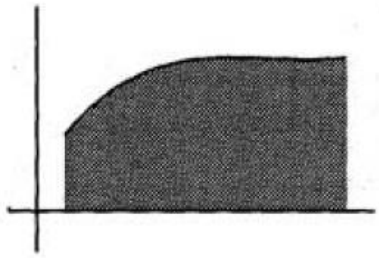


Fig. 12.1

Las sumas superiores e inferiores proporcionan aproximaciones cada vez mejores del área buscada. Esto justifica la definición que se da de integral, de modo que $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área del trapecio curvilíneo, si $f(x) \geq 0$ y $a < b$.

Después de dar las propiedades básicas de la integrabilidad se dará el teorema fundamental del Cálculo, que relaciona derivadas e integrales y facilita el cálculo efectivo de integrales, estableciendo la conexión con el capítulo anterior, que queda ahora plenamente justificado.

1. Definiciones generales

1.1. Definición. Partición

Dado un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, se llama partición de $[a,b]$ a una colección finita de puntos del intervalo, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tales que $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.

El intervalo $[a,b]$ queda dividido en n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0 \dots n-1$

1.2. Definición. Sumas superiores e inferiores

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$.

- La suma inferior de f en relación a P, denotada $L(P,f)$, se define como

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde} \quad m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

- La suma superior de f en relación a P, denotada $U(P,f)$, se define como

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \quad \text{donde} \quad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

NOTA: *Las letras L y U son las iniciales de las palabras "lower" y "upper" respectivamente.*
En la figura 12.2 se representan las áreas encerradas por una suma superior y una suma inferior.

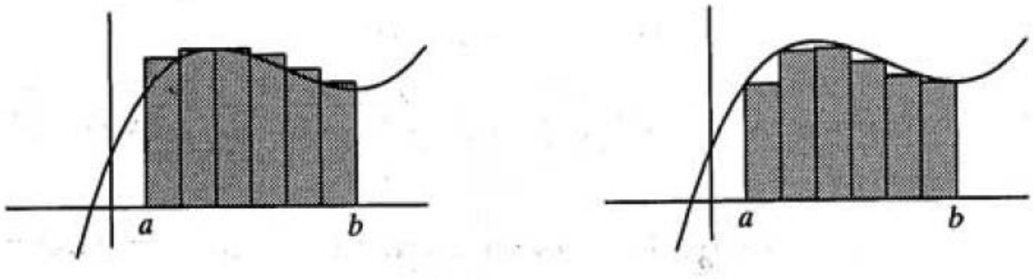


Fig. 12.2

1.3. Definición. Refinamiento

Dadas dos particiones P y Q de un intervalo $[a, b]$, diremos que Q es más fina que P si $P \subset Q$. Es decir, Q tiene todos los puntos de P y posiblemente algunos más.

1.4. Proposición.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada

a) Si P, Q son particiones de $[a, b]$, Q más fina que P, entonces

$$L(P, f) \leq L(Q, f) \leq U(Q, f) \leq U(P, f)$$

b) Si P y Q son particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces

$$L(P, f) \leq U(Q, f)$$

CONSECUENCIA:

$\{L(P, f) : P$ partición de $[a, b]\}$ es un conjunto acotado superiormente.
$\{U(P, f) : P$ partición de $[a, b]\}$ es un conjunto acotado inferiormente.

1.5. Definición. Integrabilidad

Se dice que la función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada es integrable-Riemann (o simplemente integrable) en $[a, b]$ si

$$\sup\{L(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\} = \inf\{U(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\}$$

y ese número común se denota por $\displaystyle\int_a^b f$ ó $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

COMENTARIO: *En ocasiones aparecerá $\int_a^b f$ con $b \leq a$. Para tratar esta situación se utilizará el convenio razonable:*

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

NOTA: *De la definición de integral se deduce que si f es integrable en $[a, b]$ y g coincide con f en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos, entonces g es integrable en $[a, b]$ y además $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

2. Propiedades básicas de la integral

2.1. Linealidad

El conjunto de las funciones integrables en un determinado intervalo es un espacio vectorial, y la integral es una aplicación lineal en dicho espacio. Es decir:

Si $f, g : [a,b] \longrightarrow I\!R$ son funciones integrables y $\lambda \in R$, entonces

i) $f+g$ es integrable y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

ii) λf es integrable y $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

2.2. Monotonía

Dadas $f, g : [a,b] \longrightarrow I\!R$ funciones integrables tales que $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ se verifica que

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

2.3. Acotación

Si $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ es una función integrable, existen $m, M \in I\!R$ tales que

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

NOTA: *Como m y M se puede tomar cualquier cota inferior y superior de f respectivamente.*

2.4. Aditividad respecto del intervalo

Sea $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ acotada y sea $c \in (a,b)$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$, verificándose además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

4. Promedio integral. Teoremas del valor medio

4.1. Definición. Promedio integral

Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ integrable, llamaremos promedio integral o promedio de f en $[a,b]$ al valor

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

El siguiente teorema asegura que si la función f es continua, entonces alcanza su promedio en un punto del intervalo.

4.2. Teorema del valor medio

Si $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ es una función continua, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

COMENTARIO: *Este teorema admite una sencilla interpretación geométrica: el área del trapecio curvilíneo de la figura 12.1 coincide con el área de un rectángulo que tuviera como base el intervalo* $[a, b]$ *y altura* $f(c)$ *para un cierto* $c \in [a, b]$.

4.3. Teorema del valor medio generalizado

Si f y p son dos funciones continuas en $[a, b]$ y $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$$

A veces, en problemas de ingeniería, sobre todo para funciones con promedio cero, interesa conocer el valor de la media cuadrática que se define del modo siguiente:

4.4. Definición. Media cuadrática

Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Se define la media cuadrática de f en $[a, b]$ como

$$\nu = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

5. Teorema Fundamental del Cálculo

5.1. Teorema.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Se considera la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Se verifica

a) F es continua en $[a, b]$.
b) Si f es continua en $c \in (a, b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

A partir del teorema anterior, usando la regla de la cadena y las propiedades de aditividad de la integral, se obtiene el siguiente resultado:

5.3. Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y sea G una función continua en $[a, b]$. Entonces G es derivable en (a, b) y $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ si y sólo si

$$G(x) - G(a) = \int_a^x f$$

para todo $x \in [a, b]$.

Cálculo de primitivas

Introducción

En este tema nos ocupamos del problema de calcular una primitiva o integral indefinida de una función. Es decir, dada una función f, queremos determinar F tal que para todo x del dominio de f se verifique

$$f(x) = F'(x).$$

Presentamos así la integración como el proceso inverso de la derivación.

La justificación plena de esta materia vendrá dada, en el próximo capítulo, al estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo.

El "cálculo automático de primitivas" es uno de los problemas más tratados en cualquier sistema de cálculo simbólico y está, en general, bastante bien resuelto. Por este motivo, no se dará aquí un tratamiento muy exhaustivo.

De hecho puede el lector comprobar cómo la mayoría de las integrales que aparecen en este texto, u otros análogos, se pueden obtener sin dificultad con DERIVE.

En algunos problemas resueltos no se detallarán hasta el final los cálculos que sean análogos a otros realizados en problemas anteriores.

1. Conceptos preliminares

1.1. Definición. Función primitiva

Decimos que la función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para todo punto x del dominio de f.

OBSERVACIÓN: *Dado que dos funciones que se diferencian en una constante tienen la misma derivada, si F es una primitiva de f, también lo es $F + k$, para todo $k \in \mathbb{R}$.*

1.2. Definición. Función integral indefinida

Dada la función f, se llama función integral indefinida de f al conjunto de todas sus funciones primitivas. Se suele escribir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

con C constante arbitraria, siendo F una primitiva cualquiera de f.

1.3. Integrales inmediatas

Contemplando la derivación como un proceso inverso de la integración se puede obtener la siguiente tabla de integrales inmediatas

1. $\int \alpha \, dx = \alpha x + C \quad \forall \alpha \in R$
2. $\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$
5. $\int p^x \, dx = \frac{p^x}{\log p} + C, \quad p > 0, \ p \neq 1$
6. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
7. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
8. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$
9. $\int \sec^2 x \, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
10. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) \, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$
11. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$

OBSERVACIÓN: *Ésta tabla puede ser más o menos exhaustiva.*

Una integral es inmediata si la "reconocemos" como derivada de alguna función, por tanto el concepto de integral "inmediata" es relativo.

1.4. Proposición. Linealidad de la integral

Dadas dos funciones f, g, que admiten primitiva y una constante $k \in I\!R$ se verifica

i) $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx.$

ii) $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx.$

2. Técnicas generales de integración

En esta sección se dan tres resultados que permiten transformar integrales complicadas en otras más sencillas. El primero es una consecuencia de la regla de la cadena en derivación y se conoce con el nombre de "cambio de variable". El segundo es el método de "integración por partes", que es consecuencia de la fórmula de derivación de un producto de funciones. El tercero expone el método de reducción para al cálculo de primitivas.

2.1. Cambio de variable

a) Sea Φ una función con derivada Φ' continua, y sea f una función continua. Entonces, haciendo $t = \Phi(x)$, se tiene

$$\int f(\Phi(x))\Phi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt.$$

2.2. Integración por partes

Dadas dos funciones derivables f y g se verifica

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) \, dx.$$

OBSERVACIONES:

1) *Tomando la notación diferencial, du diferencial de la función u, es decir,* $du = u'(x)\,dx$, *la fórmula de integración por partes se puede escribir*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

2) *El objetivo de la técnica de integración por partes es el de reducir la integral inicial a otra más sencilla; por ello, intentaremos tomar como u una función con derivada lo más simple posible y de modo que sepamos obtener una primitiva para dv. (Véanse ejemplos en los problemas resueltos.)*

iv) Las integrales $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx$, $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx$ y $\int \cos ax \cos bx\,dx$ se transforman en integrales inmediatas mediante las fórmulas

$$2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$
$$2\cos A \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$
$$2\operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)$$

3. Integrales de funciones racionales

Tal y como vimos en el Capítulo 3 en el epígrafe de funciones racionales, toda función racional se puede escribir como suma de un polinomio más una combinación lineal de funciones del tipo

$$\frac{A}{(x-a)},\quad \frac{A}{(x-a)^n}\ (n>1),\quad \frac{Ax+B}{(x-r)^2+s^2}\quad \text{y}\quad \frac{Ax+B}{\left((x-r)^2+s^2\right)^n}\ (n>1).$$

Usando la linealidad de la integral, bastará conocer cómo calcular una primitiva de estas fracciones simples para calcular la integral de cualquier función racional.

Integrales impropias

Introducción

En este Capítulo se trata de generalizar el concepto de integral de Riemann en $\mathbb{R}$ a casos en que interviene el infinito, ya sea porque el intervalo de integración sea no acotado, ya sea porque la función subintegral sea no acotada.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice impropia si ocurre al menos una de las hipótesis siguientes:

1. El intervalo (a,b) no está acotado.
2. La función $f(x)$ no está acotada en el intervalo (a,b).

Después de estudiar las integrales impropias para los dos casos anteriores se introducen las funciones eulerianas, de importantes aplicaciones.

El capítulo finaliza con una sección dedicada al estudio de la relación entre series e integrales impropias, cuyo resultado fundamental es el criterio integral de convergencia de series.

1. Integrales en intervalos no acotados

1.1. Definición. Integral impropia de primera especie

Corresponde al caso de intervalo no acotado, es decir, integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Veamos cómo se definen:

a) Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[M, b]$, siendo b un valor fijo y M uno cualquiera tal que $M \leq b$. Se define la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f$ como

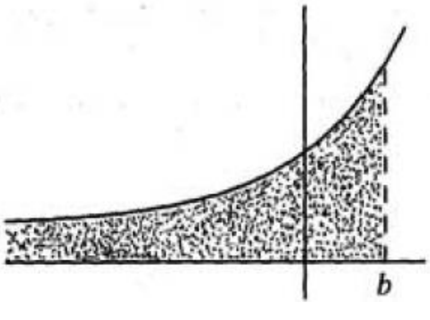
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{b} f(x)\,dx,$$

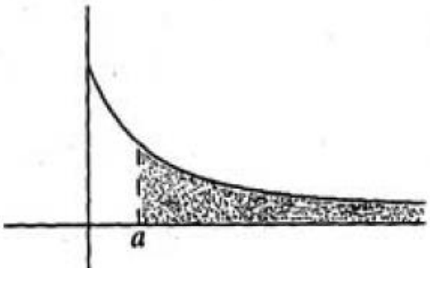
y la integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe integral.

b) Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en todo intervalo de la forma $[a, M]$, siendo a un valor fijo y M uno cualquiera tal que $M \geq a$. Se define la integral impropia $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f$ como

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{a}^{M} f(x)\,dx,$$

y la integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe integral.





NOTA: *El área de la zona sombreada es finita si la integral es convergente e infinita si es divergente, siendo la figura de la izquierda la correspondiente a la definición a) y la de la derecha a la definición b).*

c) Se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M_1 \to -\infty} \int_{M_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{M_2 \to \infty} \int_{c}^{M_2} f(x)\,dx$$

siendo c un número real arbitrario. La integral del primer miembro se dice convergente si existen y son finitos ambos límites, y se dice divergente si al menos uno de ambos límites es infinito. En otro caso, se dice que no existe integral.

EJEMPLO: *Una integral impropia de primera especie importante, que juega el mismo papel que la serie armónica generalizada en el caso de series numéricas, es la integral* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, *cuyo valor es*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \infty & \text{si } p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Luego la integral converge para $p > 1$ *y diverge para* $p \leq 1$.

1.2. Teorema. Criterio de comparación

Supuesto que exista x_0 tal que para todo $x \geq x_0$ se verifica $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, entonces

i) Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge y, para todo $x \geq x_0$, se verifica $f(x) \leq g(x)$, entonces la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

ii) Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge y, para todo $x \geq x_0$, se verifica $g(x) \leq f(x)$, entonces la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente.

1.3. Teorema. Criterio de comparación en el límite

Supuesto que exista $x_0 > a$ tal que para todo $x \geq x_0$ se verifica $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ y que $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, entonces:

i) Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, las integrales $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente.

ii) Si $A = 0$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

iii) Si $A = \infty$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

1.4. Corolario.

Supuesto que exista $x_0 > a$ tal que para todo $x \geq x_0$ se verifica $f(x) \geq 0$, entonces, siendo $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A$, se tiene:

i) Si $A \in I\!R - \{0\}$ y $p > 1$, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

ii) Si $A \in I\!R - \{0\}$ y $p \leq 1$, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

iii) Si $A = 0$ y $p > 1$, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

iv) Si $A = \infty$ y $p \leq 1$, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

NOTA: *Los restantes casos posibles son casos dudosos.*

Aplicaciones de la integral

Introducción

Abordamos en este capítulo algunas aplicaciones del cálculo integral. Se ha subdividido en dos partes: aplicaciones geométricas y aplicaciones físicas.

En la primera parte se presentarán los métodos habituales de cálculo de áreas, longitudes de arco y volúmenes, que se pueden tratar mediante integrales de funciones de una variable.

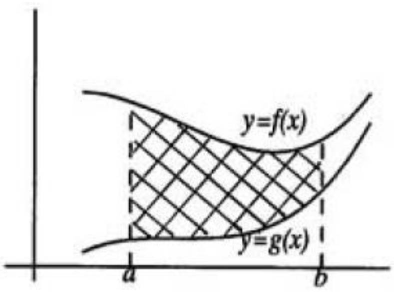
Para la segunda parte prescindiremos del resumen teórico, y los resultados físicos que se necesiten para realizar los problemas se irán introduciendo sobre la marcha.

1. Área de una región plana

1.1. Área encerrada por dos curvas definidas en forma explícita

Si f y g son funciones integrables (por ejemplo continuas) en $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (véase figura 15.1) es

$$A = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

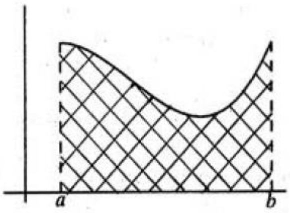


NOTAS:

1) El intervalo (a,b) podría ser infinito y en este caso la definición sería análoga, pero es preciso que la integral impropia sea convergente.

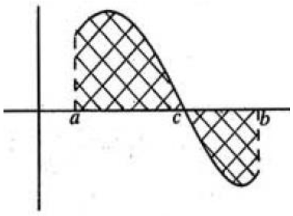
2) Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) = 0$, se obtiene el área de la figura plana determinada por f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de abscisas (véase figura 15.2), que es

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



3) Si $f(x)$ no conserva el signo en el intervalo $[a,b]$, se utilizará que $\int_a^b -f = -\int_a^b f$. Si suponemos que $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,c]$ y $f(x) \leq 0$ para $x \in [c,b]$, entonces el área de la región plana encerrada por f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de OX (véase figura 15.3) está dada por

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$



4) Se puede dar una fórmula general de tal forma que si las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en los puntos de abscisas a y b el área encerrada por dichas curvas es

$$A = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|\,dx$$

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) - g(x) = 0$. Si las curvas se aproximan asintóticamente se puede interpretar que se cortan en el infinito.

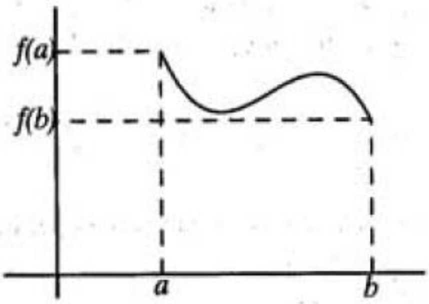
2. Longitud de un arco de curva

2.1. Forma explícita

Sea la curva $y = f(x)$ siendo f una función derivable y con derivada continua en $[a,b]$. La longitud del arco AB de dicha curva viene dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

siendo A y B los puntos de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente (véase figura 15.5).



3. Cálculo de volúmenes

3.1. Volumen de un sólido

Si tenemos un cuerpo que al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX da lugar, en cada punto de abscisa x, a una sección de área $A(x)$, el volumen de dicho cuerpo comprendido entre los planos perpendiculares al eje OX en los puntos de abscisas a y b es

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

NOTA: *De modo análogo se puede definir el volumen de un sólido comprendido entre planos perpendiculares al eje OY o al eje OZ.*

3.2. Corolario. Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX se genera un sólido de revolución cuyos cortes perpendiculares al eje OX tienen área $A(x) = \pi\big(f(x)\big)^2$ (al ser circunferencias de radio $|f(x)|$); por tanto,

$$V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$$

En general, el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje OX la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ (f y g integrables en $[a, b]$) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \int_a^b \pi\left(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\right)\,dx$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Calcular*

a) $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$ *b)* $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

SOLUCIÓN:

a) El integrando es del tipo x^p, por lo que

- si $\frac{n}{m} = -1$, $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$.
- si $\frac{n}{m} \neq -1$, $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \int x^{n/m}\,dx = \dfrac{x^{(n/m)+1}}{\frac{n}{m}+1} + C$.

b) Para obtener la integral, basta sumar y restar 1, para poderla descomponer en suma de dos integrales inmediatas, obteniendo:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1)\,dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

2. *Obtener por sustitución el valor de las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\int e^{4x}\,dx$ *b)* $\int \dfrac{x^3}{2+x^8}\,dx$

c) $\int \dfrac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *d)* $\int \dfrac{dx}{x\log x}$

SOLUCIÓN:

a) Para convertir la integral en inmediata hacemos el cambio $4x = t$. Entonces

$$\int e^{4x}\,dx = \int e^t \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}e^t + C = \frac{1}{4}e^{4x} + C.$$

b) Observemos que en el numerador se tiene x^3 que, salvo en una constante, es la derivada de x^4; por ello, hacemos el cambio de variable $x^4 = t$, con lo que $x^3 dx = \frac{1}{4}\,dt$. Entonces

$$I = \int \frac{x^3}{2+x^8}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}\,dt}{2+t^2}.$$

Ahora intentamos convertir el integrando en la derivada de una función de tipo arcotangente; para ello dividimos por 2 el numerador y el denominador obteniendo

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+\frac{t^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$$

c) Dado que la derivada de $\operatorname{arcsen} x$ es $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, se tiene, haciendo el cambio $\operatorname{arcsen} x = u$

$$\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\operatorname{arcsen} x} + C.$$

d) Al ser $\dfrac{1}{x}$ la derivada de $\log x$, haciendo el cambio $\log x = t$ se tiene

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|\log x| + C.$$

3. *Integrar por partes*

a) $\displaystyle\int x^5 \log x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$

SOLUCIÓN:

a) Eligiendo $\log x = u$ y $x^5\,dx = dv$ se tiene $v = \dfrac{x^6}{6}$ y la integral por partes se puede obtener como
$$\int x^5 \log x\,dx = \frac{x^6}{6}\log x - \frac{1}{6}\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}\log x - \frac{x^6}{36} + C = \frac{x^6}{36}\left[6\log x - 1\right] + C.$$

b) Escogiendo $e^x = u$ y $\cos x\,dx = dv$, se tiene $v = \operatorname{sen} x$ y con ello
$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Si ahora tomamos en la última integral $e^x = u$ y $\operatorname{sen} x\,dx = dv$ ($v = -\cos x$), queda
$$I = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx\right),$$
que es equivalente a $I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I$. Por tanto
$$I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

Es decir,
$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C.$$

6. *Calcular las integrales de funciones racionales siguientes:*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

SOLUCIÓN:

a) Realizamos la descomposición en fracciones simples y hacemos las integrales de las funciones elementales.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-4x+3} &= \int \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x-3| - \frac{1}{2}\log|x-1| + C \\ &= \log\sqrt{\left|\frac{x-3}{x-1}\right|} + C\end{aligned}$$

b) De forma análoga al apartado anterior

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx &= \int \frac{x+1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\ &= \log|x+2| + \frac{1}{x+2} + C\end{aligned}$$

c) En este caso, el numerador es un polinomio de mayor grado que el denominador; por ello, para empezar, realizamos la división. Notemos también que el denominador no tiene raíces reales.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}\,dx &= \int \left(x-4+\frac{2x+52}{x^2+4x+13}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 4x + \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}\,dx + \int \frac{48}{x^2+4x+13}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 4x + \log(x^2+4x+13) + 48\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} \\ &= \frac{x^2}{2} - 4x + \log(x^2+4x+13) + \frac{48}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - 4x + \log(x^2+4x+13) + \frac{48}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C\end{aligned}$$

NOTA: *En la integral del último sumando se ha realizado el proceso de "completar" un cuadrado perfecto para buscar la derivada de un arcotangente.*

d)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{x} + \log|x-1| - \log|x+1| + C\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x+1}{x^2+4}\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}\\ &= \frac{1}{6}\log(x^2+1)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{6}\log(x^2+4)-\frac{1}{3}\int\frac{1/4\,dx}{(x/2)^2+1}\\ &= \frac{1}{6}\log\frac{x^2+1}{x^2+4}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

8. *Calcular*

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x)^3\,dx$

SOLUCIÓN:

a) Hacemos el cambio $e^x = t$, con lo que $x=\log t$ y $dx = dt/t$. Entonces

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x)+C$$

b) Realizamos el cambio de variable $\operatorname{tg} x = t$ con lo que $x = \operatorname{arctg} t$ y $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Así

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int t^3\,\frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

y ésta es una integral racional cuya solución es $\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{2}\log(t^2+1)+C$ por lo que

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\log(\operatorname{tg}^2 x+1)+C.$$

11. *Calcular* $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)\,dx.$

SOLUCIÓN:

Por las propiedades de las funciones trigonométricas podemos poner el producto de funciones del integrando como una suma.

$$\operatorname{sen}(5x)\cos(6x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(5x+6x)+\operatorname{sen}(5x-6x)\right);$$

entonces

$$\int \operatorname{sen}(5x)\cos(6x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen}(11x)\,dx - \int \operatorname{sen} x\,dx\right] = \frac{-1}{22}\cos(11x)+\frac{1}{2}\cos x + C$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

INDICACIÓN: *Multiplicar y dividir por* $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$.

2. *Calcular las siguientes integrales:*

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6)^{1/3}}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. *Calcular las integrales*

a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} 3x\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

5. *Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:*

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^6-1}\,dx$

INDICACIÓN: *Se recomienda en el apartado c) hacer previamente la sustitución* $x^2=t$.

PROBLEMAS RESUELTOS

5. *Sea* f *una función continua en el intervalo* $[a,b]$ *, de forma que se cumple que* $a<b$ *y que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones se deducen necesariamente de estas hipótesis?*

a) $f(x)=0\ ,\ \forall x \in [a,b]$. *b)* $\exists x \in [a,b] \,/\, f(x)=0$.

c) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = 0$. *d)* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$.

e) $U(P,f)\geq 0$ *para cualquier partición* P *de* $[a,b]$.

f) $U(P,f)>0$ *para alguna partición* P *de* $[a,b]$.

g) $L(P,f)\leq 0$ *para toda partición* P *de* $[a,b]$.

h) $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$. *i)* $\displaystyle\int_a^b (f(x)+1)\,dx = b-a$.

SOLUCIÓN:

a) La afirmación $f(x) = 0$, para cualquier $x \in [a, b]$, no se deduce necesariamente de las hipótesis. Por ejemplo, si $[a, b] = [-1, 1]$ y $f(x) = x$, se tiene que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = 0$$

y no es $f \equiv 0$.

b) Si la afirmación de b) no fuera cierta, debería ser entonces $f(x) \neq 0$, para cualquier x que pertenezca al intervalo $[a, b]$. Como f es una función continua en $[a, b]$, si no se anula debe mantener su signo constante en todo el intervalo. Supongamos, por ejemplo, que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$.
Como f es continua en $[a, b]$, alcanza el mínimo

$$\exists m > 0 \;/\; f(x) \geq m, \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{a}^{b} m\,dx = m(b - a) > 0.$$

en contra de la hipótesis. En consecuencia, se puede afirmar que si f es continua en $[a, b]$ y $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 0$, debe existir $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

c) Es evidentemente cierta, ya que $\left| \int_{a}^{b} f(x)\,dx \right| = |0| = 0.$

d) No es cierta . Por ejemplo , si el intervalo es el $[-1, 1]$ y la función es $f(x) = x$, se cumple que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$. Pero

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = 2\int_{0}^{1} x\,dx = 1.$$

e) Se sabe que por ser f integrable en $[a, b]$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \inf\{U(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\ \}.$$

Si el ínfimo de un conjunto es 0, se puede decir que todos sus elementos son mayores o iguales que 0. Entonces, $U(P, f) \geq 0$ para toda P partición de $[a, b]$.

f) No es cierta, y se demostrará con un ejemplo.
Si $f(x) = 0$, en el intervalo $[a, b]$, se tiene que $U(P, f) = 0$ para toda P partición de $[a, b]$.

g) Sí se deduce, ya que $\sup\{L(P, f) : P \text{ partición de } [a, b]\ \} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = 0.$

h) No es cierta. Sea la función continua $f(x) = x$, definida en el intervalo $[-1,1]$. La integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, mientras que

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

i) Sí es cierta. Realizando la integral se tiene

$$\int_{a}^{b} (f(x)+1)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} 1\,dx = \int_{a}^{b} 1\,dx = b-a.$$

12. *Hallar el valor $\mu \in \mathbb{R}$ que cumpla $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 2\mu$, siendo*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

¿Existe algún punto c del intervalo $[1,3]$ tal que $f(c) = \mu$?
¿Contradice esto el teorema del valor medio integral?

SOLUCIÓN:

El valor de la integral es

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} 1\,dx + \int_{2}^{3} 2\,dx = 3$$

con lo que $\mu = \frac{3}{2}$.

No existe un punto c de tal forma que $f(c) = \frac{3}{2}$, porque la función f sólo toma dos posibles valores en el intervalo : 1 y 2.

Sin embargo, no se contradice el teorema del valor medio, ya que la función f no es continua en el intervalo $[1,3]$.

16. *La intensidad de cierta corriente alterna tiene por expresión $I(t) = I_m \operatorname{sen} \omega t$, siendo I_m la intensidad máxima y ω la pulsación (es decir $\omega = \frac{2\pi}{T}$ siendo T el período). Se pide*
    a) *Hallar la intensidad eficaz I_e que corresponde al valor medio cuadrático de $I(t)$.*
    b) *Hallar el valor medio de la intensidad $I(t)$ en un período.*
    c) *Hallar el valor medio de dicha intensidad $I(t)$ en el semiperíodo $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.*

SOLUCIÓN:

a) Dado un intervalo $[a, b]$ de longitud igual al período T, la intensidad eficaz es

$$I_e = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b I^2(t)\, dt \right)^{1/2}$$

Supongamos que $T = 1$ (se deja como ejercicio al lector comprobar que para todo valor de T se obtiene el mismo resultado). Trabajando entonces en el intervalo $[0, 1]$ se tiene

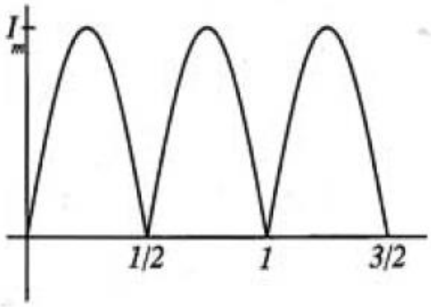
$$I_e = \left(\int_0^1 I_m^2 \operatorname{sen}^2 2\pi t\, dt \right)^{1/2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

(Al cociente $\dfrac{I_m}{I_e}$, en este caso $\sqrt{2}$, se le denomina "factor de amplitud".)

b) El valor medio será $V_m = \displaystyle\int_0^1 I_m \operatorname{sen} 2\pi t\, dt = 0.$

c) $V_m = \dfrac{1}{1/2} \displaystyle\int_0^{1/2} I_m \operatorname{sen} 2\pi t\, dt = 2I_m \left[\frac{-\cos 2\pi t}{2\pi} \right]_0^{1/2} = 2\frac{I_m}{\pi}.$

NOTA: *Dicho valor medio en un semiperíodo es el valor medio de la corriente "rectificada" es decir aquella en la que* $I(t) = I_m |\operatorname{sen} 2\pi t|$, *cuya gráfica es*



20. *Calcular la derivada de las siguientes funciones*

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt$ *b)* $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3}\, dt$

SOLUCIÓN:

Se aplicará en los apartados a), b) y c) el Teorema 5.1 y la regla de la cadena.

a) $F'(x) = 2x \operatorname{sen} \left(x^2\right)^2 = 2x \operatorname{sen} x^4.$

b) $G'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(x^2\right)^3} 2x = \dfrac{2x}{1 + x^6}.$

22. *Calcular los siguientes límites*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^{x}e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^{x}e^{2t^2}\,dt}$

SOLUCIÓN:

a) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Además, tanto la función del numerador como la del denominador son derivables; en consecuencia, se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\operatorname{sen}\sqrt{x^2}\right)2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$$

Este límite no existe, porque tiene valores distintos por la derecha y por la izquierda.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}|x|}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}|x|}{x}=-\frac{2}{3}$$

b) El límite es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Observemos que $e^{t^2}\geq 1$ para todo t, de donde $\int_0^x e^{t^2}\,dt\geq x$, por lo que

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{t^2}\,dt=\infty.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^{x}e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^{x}e^{2t^2}\,dt}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\int_0^{x}e^{t^2}\,dt\right)e^{x^2}}{e^{2x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^{x}e^{t^2}\,dx\right)}{e^{x^2}}$$

Y volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación, se obtiene que el valor del límite pedido es

$$2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$$

23. *Probar que la función* $F(x)=-1+\int_0^x e^{t^2}\,dt$ *tiene una sola raíz, que se encuentra en el intervalo* $[0,1]$.

SOLUCIÓN:

F es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada es $F'(x) = e^{x^2}$, que es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto F es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, y en consecuencia tendrá a lo sumo una raíz.

Además

$$F(0) = -1 < 0$$
$$F(1) = -1 + \int_0^1 e^{t^2}\,dt$$

Por la monotonía de la integral, al ser $e^{t^2} > 1$ en $t \in (0,1)$ se verifica

$$\int_0^1 e^{t^2}\,dt > \int_0^1 1\,dt = 1$$

y , por tanto, $F(1) > 0$. Por el teorema de Bolzano, F tiene una raíz en $[0,1]$.

24. *Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$, con $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; y sea*

$$F(x) = \int_0^{x^2-3x+2} f(t)\,dt.$$

Estudiar el crecimiento y los extremos locales de la función F.

SOLUCIÓN:

Puesto que f es continua, y $x^2 - 3x + 2$ es derivable, tenemos que F también es derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo $F'(x) = f(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$.

Los puntos críticos serán aquéllos en los que $F'(x) = 0$, es decir,

$$f(x^2 - 3x + 2) = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x - 3 = 0.$$

La función f se anula en $x = 0$ y, puesto que la derivada de f es siempre positiva, f es creciente y no hay ningún otro punto en el que f valga 0.

Entonces $f(x^2 - 3x + 2) = 0$ si $x^2 - 3x + 2 = 0$, es decir si $x = 2$ ó $x = 1$.

Por otra parte $2x - 3 = 0$ si y sólo si $x = \dfrac{3}{2}$.

Así F' se anula en los puntos $\left\{1, 2, \dfrac{3}{2}\right\}$.

La segunda derivada de F es $F''(x) = f'(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)^2 + 2f(x^2 - 3x + 2)$, por tanto

$F''(1) = f'(0)(-1)^2 + 2f(0) = f'(0) > 0$, por tanto F tiene un mínimo en $x = 1$.

$F''(2) = f'(0)1 + 2f(0) = f'(0) > 0$, por tanto F tiene un mínimo en $x = 2$

$F''\left(\dfrac{3}{2}\right) = f'\left(-\dfrac{1}{4}\right) \cdot 0 + 2f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2f\left(-\dfrac{1}{4}\right)$. Al ser f es creciente y $f(0) = 0$, es $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) < f(0) = 0$. En consecuencia, F tiene máximo en $x = \dfrac{3}{2}$.

Para estudiar el crecimiento de F hay que tener en cuenta que los puntos $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ y $x = 2$ son extremos de la función. Consideremos los intervalos

$$\text{i) } (-\infty, 1) \quad \text{ii) } \left(1, \frac{3}{2}\right) \quad \text{iii) } \left(\frac{3}{2}, 2\right) \quad \text{iv) } (2, \infty).$$

Estudiemos por separado cada uno de estos intervalos :

i) En este intervalo, $x^2 - 3x + 2 > 0$, por tanto $f(x^2 - 3x + 2) > 0$.
Además, $2x - 3 < 0$ con lo que $F'(x) = f(x^2 - 3x + 2)(2x - 3) < 0$. Entonces, F es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$

ii) Ahora tenemos que $x^2 - 3x + 2 < 0$ con lo que $f(x^2 - 3x + 2) < 0$.
Además, $2x - 3 < 0$ con lo que $F'(x) > 0$. Entonces, F es creciente en el intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

iii) Si $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, entonces $x^2 - 3x + 2 < 0$ y por tanto $f(x^2 - 3x + 2) < 0$.
Además, $2x - 3$ es positivo. Entonces, la derivada de F es negativa y la función decrece en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

iv) En este intervalo $x^2 - 3x + 2 > 0$ y $2x - 3 > 0$, con lo que $F'(x) > 0$ y F es creciente en el intervalo $(2, \infty)$.

29. ***Supongamos que la gasolina sube de precio de acuerdo con la ecuación***

$$p = 90 + 0'1t + 0'02t^2,$$

donde p es el precio en pesetas del litro y $t = 0$ representa el año 1990.
Si un coche recorre 20 000 km al año y consume 1 litro cada M km, su coste de combustible en el año t es

$$c = \frac{20\,000}{M} \int_t^{t+1} p(x)\, dx.$$

Hallar el coste anual para el año 1992 y la previsión de coste para 1995.

SOLUCIÓN:

Calculamos el coste para 1992 ($t = 2$)

$$\begin{aligned} c &= \frac{20\,000}{M} \int_2^3 p(x)\, dx = \frac{20\,000}{M} \int_2^3 (90 + 0'1x + 0'02x^2)\, dx \\ &= \frac{20\,000}{M} \left(90 + 0'1 \left(\frac{9}{2} - 2\right) + 0'02 \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right)\right) \\ &= \frac{20\,000}{M} \left(90 + 0'1 \frac{5}{2} + 0'02 \frac{19}{3}\right) = \frac{1\,807\,533'3 \cdots}{M} \text{ pesetas.} \end{aligned}$$

La previsión para el año 1995

$$\begin{aligned} c &= \frac{20\,000}{M} \int_5^6 p(x)\, dx = \frac{20\,000}{M} \left(90 + 0'1 \left(\frac{36}{2} - \frac{25}{2}\right) + 0'02 \left(\frac{216}{3} - \frac{125}{3}\right)\right) \\ &= \frac{1\,823\,133'3 \cdots}{M} \text{ pesetas.} \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

3. *Estudiar en cada caso la integrabilidad de las funciones en el intervalo indicado.*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ x^3 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$ *en el intervalo* $[-1, 5)$.

b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *en el intervalo* $[-1, 1]$.

10. *La tasa de variación en la población de conejos es*

$$\frac{dP}{dt} = \frac{100 - 25t}{t^2 - 8t + 16'1} \qquad (t \text{ en años})$$

Hallar

a) *¿Cuándo es máxima dicha población?*

b) *Si la población inicial de conejos es de* 50 *unidades, hallar el máximo número de conejos.*

c) *¿Se extinguirán los conejos? Si es así, ¿cuándo?*

13. *Hallar el valor promedio de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 10 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

en el intervalo $[1, 3]$.

20. *Calcular los siguientes límites*

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{tg} t \, dt}{\operatorname{sen} x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\int_0^x \operatorname{sen} t \, dt} \operatorname{sen} t \, dt}{x^2}$

28. *Hallar el período de un péndulo para oscilaciones pequeñas (x_0 pequeño) cuya expresión viene dada por*

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y L la longitud del péndulo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Calcular, en caso de que existan, las integrales*

$$a) \int_0^\infty e^{-3x}\,dx \qquad b) \int_0^\infty e^{3x}\,dx \qquad c) \int_0^\infty \cos x\,dx$$

SOLUCIÓN:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^M = \lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-3M}}{3} = \frac{1}{3}.$

La integral es, pues, convergente.

b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^M = \lim_{M\to\infty}\frac{e^{3M}-1}{3} = \infty.$

La integral es, pues, divergente.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \cos x\,dx = \lim_{M\to\infty} \operatorname{sen} x]_0^M = \lim_{M\to\infty} \operatorname{sen} M.$

Al no existir este límite, se concluye que la integral no existe.

2. *Estudiar la convergencia o divergencia de las integrales*

$$a) \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15} \qquad b) \int_5^\infty \frac{dx}{\log x - 1}$$

SOLUCIÓN:

a) Para $x \geq 0$ se verifica

$$0 \leq \frac{1}{e^x+15} < \frac{1}{e^x} = e^{-x},$$

y, además, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ es convergente, ya que

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^M = \lim_{M\to\infty}(1-e^{-M}) = 1.$$

Luego, en virtud del criterio de comparación para integrales impropias de primera especie, se concluye que la integral es convergente.

b) Para $x \geq 5$ se verifica

$$\frac{1}{\log x - 1} > \frac{1}{\log x} > \frac{1}{x} > 0,$$

y además $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{x}\,dx$ es divergente. Luego, en virtud del criterio de comparación para integrales impropias de primera especie, se concluye que la integral es divergente.

3. *Estudiar la convergencia o divergencia de las integrales*

$$a) \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+5}\,dx \qquad\qquad b) \int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+6}\,dx$$

SOLUCIÓN:

a) Como

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^4+5}x^2 = 1 \qquad (p = 2 > 1,\ A = 1),$$

entonces, en virtud del corolario 1.4, se concluye que la integral es convergente.

b) Como

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+6}x = 1 \qquad (p = 1 \leq 1,\ A = 1),$$

entonces, en virtud del corolario 1.4, se concluye que la integral es divergente.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Calcular, si existen, las integrales*

$$a) \int_{13}^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad b) \int_1^\infty xe^{x^2}\,dx \qquad c) \int_1^\infty \cos^2 x\,dx$$

2. *Estudiar la convergencia o divergencia de las integrales*

$$a) \int_1^\infty \frac{dx}{\cosh x} \qquad\qquad b) \int_{18}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-4}$$

3. *Estudiar la convergencia o divergencia de las integrales*

$$a) \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+5} \qquad b) \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad c) \int_0^\infty x^3e^{-x}\,dx$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ***Hallar el área determinada por la curva $y = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.***

SOLUCIÓN:

El área que queremos calcular es la que se muestra en la figura 15.6

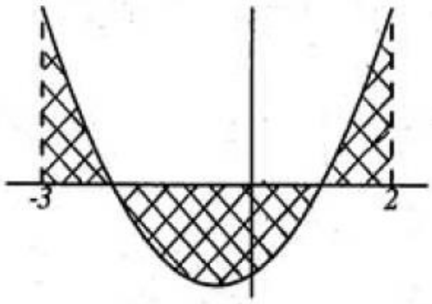


Fig. 15.6

es decir $A = \int_{-3}^{2} |(x-1)(x+2)|\,dx$. Teniendo en cuenta el signo de la función resulta

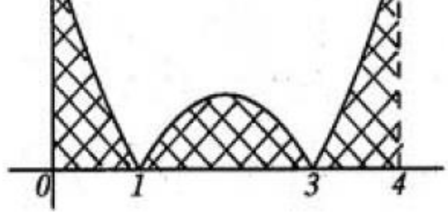
$$A = \int_{-3}^{-2} (x-1)(x+2)\,dx + \int_{-2}^{1} \big|(x-1)(x+2)\big|\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)(x+2)\,dx =$$
$$= \int_{-3}^{-2} (x^2+x-2)\,dx + \int_{-2}^{1} -(x^2+x-2)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2+x-2)\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2} = \frac{49}{6}$$

2. ***a) Hallar el área encerrada por la gráfica $y = |x^2-4x+3|$ entre $x = 0$ y $x = 4$.***
   b) Hallar el área determinada por la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

SOLUCIÓN:

a) Teniendo en cuenta que

$$|x^2-4x+3| = \begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si } x \in I\!R-[1,3] \\ 4x-x^2-3 & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$$



el área pedida será

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_1^3 (4x - x^2 - 3)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\,dx = 4$$

b) La única asíntota de la curva es horizontal, y es $y = 0$ ya que $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0.$

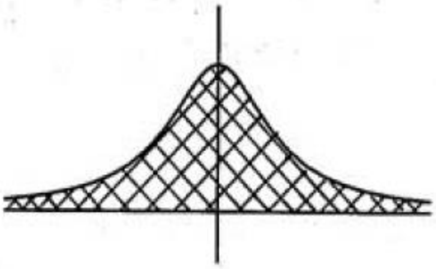


Fig. 15.8

Entonces

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= 2\lim_{b\to\infty}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^b = 2\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \pi$$

3. *Dadas las funciones* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ *y* $g(x) = \dfrac{x-1}{8x}$, *determinar el área de la región limitada por sus gráficas y los semiejes coordenados positivos.*

SOLUCIÓN:

Las gráficas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en los puntos (x, y) tales que

$$\frac{1}{x^2+3} = \frac{x-1}{8x}$$

es decir $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$. Esta ecuación tiene soluciones $x = 3$ y $x = -1$, pero esta última no interesa por ser negativa. Entonces, el área pedida es la rayada en la figura 15.9.

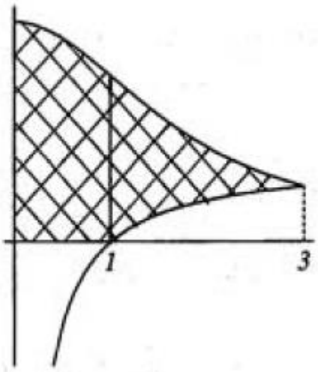


Fig. 15.9

Entonces:

$$A = \int_0^3 \frac{dx}{x^2+3} - \int_1^3 \frac{x-1}{8x}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{1}{8}\int_1^3 \left(1-\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^3 - \frac{1}{8}\Big[x-\log x\Big]_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{1}{4} + \frac{\log 3}{8}$$

4. *Calcular el área del círculo centrado en el origen y de radio r expresando la circunferencia contorno*
   a) como ecuación explícita,
   b) en paramétricas,

SOLUCIÓN:

a) Dado que la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ no es la gráfica de ninguna función definida en forma explícita, consideramos la ecuación de la semicircunferencia superior

$$y = \sqrt{r^2-x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

y entonces el área del círculo será

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

Esta integral se puede calcular haciendo el cambio de variable $x = r\,\mathrm{sen}\,t$, resultando:

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-r^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,r\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2 t\,dt =$$

$$= 4r^2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right) dt = \pi r^2$$

b) Las ecuaciones paramétricas

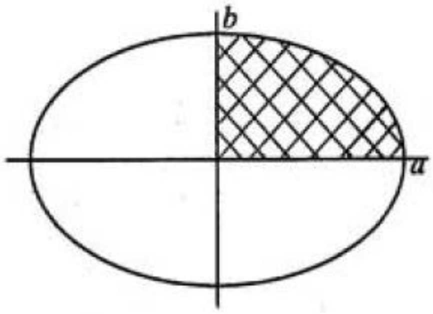
$$x = r\cos t, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,t \qquad t\in[0,2\pi]$$

determinan la circunferencia centrada en el origen y de radio r. Por lo tanto el área del círculo es

$$A = \int_0^{2\pi} |r\,\mathrm{sen}\,t\, r\,\mathrm{sen}\,t|\,dt = r^2\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{sen}^2\,t\,dt = r^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \pi r^2$$

6. *Calcular el área encerrada por la elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

SOLUCIÓN:



Por simetría (véase figura 15.11), el área será cuatro veces el área de la zona del primer cuadrante, es decir basta calcular el área limitada por la curva $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ entre los puntos de abscisa 0 y a.

Por tanto será

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi ab$$

(Para obtener la integral anterior se ha realizado el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} t$. Se deja como ejercicio al lector la comprobación del resultado).

11. *Es conocida la propiedad de un espejo en forma de parábola de que los rayos paralelos al eje se reflejan todos pasando por el foco de la parábola. Para la conducción nocturna de automóviles se usan faros en forma de espejo parabólico, porque así son paralelos los reflejos de todos los rayos que parten del foco (véase figura 15.15).*

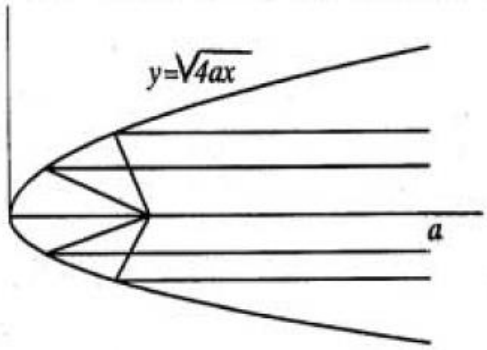


Fig. 15.15

Un faro tiene forma de espejo parabólico como el de la figura. Sabiendo que el material reflectante del faro tiene un precio de 1000 pts/m², hallar el coste de dicho material para $a = 0'15$ m.

SOLUCIÓN:

Hemos de calcular la superficie lateral de la figura.

Notemos que el espejo se obtiene al girar la curva $y = \sqrt{4ax}$ en torno al eje OX entre las abscisas 0 y a.

Para calcular la superficie utilizamos la fórmula

$$S = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

Dado que $y'(x) = \sqrt{\frac{a}{x}}$ se tiene

$$S = 2\pi\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{a}{x}}\,dx = 4\pi\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{a + x}\,dx = \frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1)$$

Si $a = 0'15$ metros el coste será $C = \frac{8}{3}\pi(0'15)^2(2\sqrt{2} - 1)\cdot 1000 \approx 344'65$ pesetas.

15. *Un tren inicia su recorrido acelerando a razón de 1 m/s² hasta que alcanza su velocidad de régimen, que es 108 km/h, manteniendo luego dicha velocidad constante. Hallar el espacio recorrido por el tren en los dos primeros minutos de su recorrido.*

SOLUCIÓN:

La función velocidad $v(t)$ la obtendremos teniendo en cuenta que

$$v(t) = \int_0^t a(x)\,dx + v_0$$

donde $a(t)$ es la aceleración en el instante t. En nuestro caso, $v_0 = 0$, $a(t) = 1$ m/s². Por tanto

$$v(t) = \int_0^t 1\,dt = t$$

siendo válida dicha expresión hasta que alcanza la velocidad de régimen que es, en este caso, 108 km/h = 30 m/s. Entonces

$$v(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \le t \le 30 \\ 30 & \text{si } t \ge 30 \end{cases}$$

18. *Hallar el centro de gravedad de un cono homogéneo (densidad ρ constante) de radio r y altura h.*

SOLUCIÓN:

Supondremos el cono colocado de la forma que se ve en la figura 15.21.

Por simetría, las coordenadas del centro de gravedad serán $(x_G, 0, 0)$. Para calcular x_G utilizamos la fórmula que nos da la coordenada x del centro de masas, que es

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^h x\,dm}{\displaystyle\int_0^h dm}.$$

siendo dm la diferencial de la masa

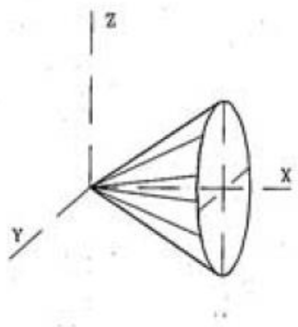


Fig. 15.21

En nuestro caso $dm = \rho\,dV = \rho A(x)\,dx$, siendo V el volumen, con $\rho = k$, que es constante, y $A(x)$ el área de un círculo de radio $\frac{rx}{h}$. Por tanto

$$dm = k\pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx.$$

Entonces,

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^h \frac{k\pi r^2}{h^2}x^3\,dx}{\displaystyle\int_0^h \frac{k\pi r^2}{h^2}x^2\,dx} = \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^h} = \frac{3}{4}h.$$

Hemos obtenido que el centro de gravedad de un cono homogéneo de altura h está sobre el eje del cono a $\frac{h}{4}$ de la base y a $\frac{3}{4}h$ del vértice.

19. *Una varilla de 10 cm tiene una sección constante de 4 cm^2. Hallar el centro de masas de la varilla si*
    - *a) Su densidad es constante ($\rho = k$).*
    - *b) Su densidad lineal varía linealmente de 3 a 6 g/cm^3.*

SOLUCIÓN:

Si suponemos la varilla en la situación de la figura, en ambos casos las coordenadas del centro de masas será $(x_G, 0, 0)$. Hallaremos pues x_G en ambos casos.

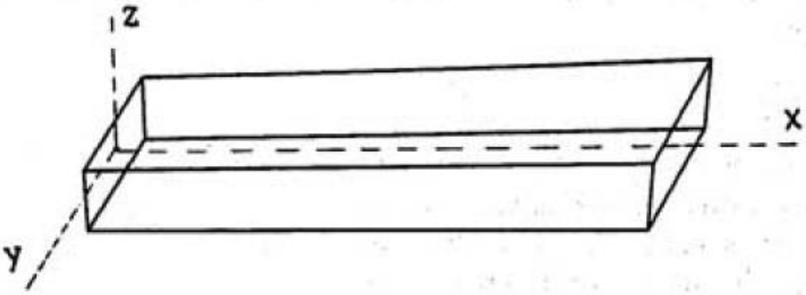


Fig. 15.22

a) La fórmula que determina la coordenada x del centro de masas es

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^{10} x\, dm}{\displaystyle\int_0^{10} dm} = \frac{\displaystyle\int_0^{10} 4kx\, dx}{\displaystyle\int_0^{10} 4k\, dx} = \frac{4k \left.\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{10}}{40k} = 5 \text{ cm}$$

Este resultado es "natural" al ser la varilla homogénea.

b) Ahora $\rho(x) = A + Bx$. Al ser $\rho(0) = 3$, $\rho(10) = 6$, se obtiene $\rho(x) = 3 + 0'3x$. Por tanto $dm = A\rho(x)\, dx = 4(3 + 0'3x)\, dx$. En consecuencia

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^{10} 4(3+0'3x)x\, dx}{\displaystyle\int_0^{10} 4(3+0'3x)\, dx} = \frac{4\left[\dfrac{3x^2}{2} + 0'1x^3\right]_0^{10}}{4\left[3x + 0'3\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{10}} = \frac{250}{45} = 5'56\text{cm}.$$

20. *Hallar el momento de inercia de una varilla delgada de masa M y longitud L respecto de un eje perpendicular al eje de la varilla, que pase por su centro. Se supone la varilla homogénea, es decir, de densidad constante.*

SOLUCIÓN:

En general, $I = \int r^2\, dm$, donde r es la distancia del elemento de masa dm a la figura (punto, eje o plano) respecto a la cual se quiere calcular el momento de inercia.

En nuestro caso, la densidad lineal ρ es constante y vale $\rho = \dfrac{M}{L}$. Por tanto

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2\, dm = 2\int_0^{L/2} x^2\, dm.$$

Al ser $dm = \rho\, dx = \dfrac{M}{L}\, dx$, se tiene

$$I = 2\int_0^{L/2} x^2 \frac{M}{L}\, dx = \frac{ML^2}{12}.$$

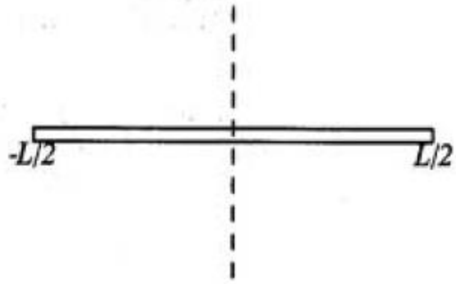


Fig. 15.23

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por las parábolas*

$$y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad y^2 = 4(x+1), \quad y^2 = 6\left(\frac{3}{2} - x\right), \quad y^2 = 4(1-x)$$

2. *Calcular el área del recinto limitado por las curvas*

$$x^2 + y^2 = 3, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad x = \frac{1}{2}y^2$$

3. *Hallar el área encerrada por la curva* $y = e^{-|x|}$ *y su asíntota.*

4. *Hallar el área de la región limitada entre las curvas* $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ *e* $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$
   a) entre las abscisas $x = 2$ *y* $x = 3$,
   b) para la región dada por $x \geq 3$.

8. *Hallar la longitud del astroide de la figura 15.25, cuya ecuación es*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

INDICACIÓN: *Se sugiere la parametrización*

$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\,\mathrm{sen}^3 t$$

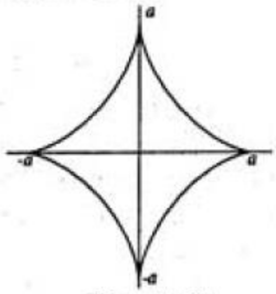


Fig. 15.25

10. *Calcular los volúmenes*
   a) *del cono de radio de base r y altura h,*
   b) *del cilindro de radio r y altura h,*

   usando que ambos son sólidos de revolución.

15. *Se taladra una esfera de radio R por medio de una broca de radio $\frac{R}{2}$ de tal forma que el centro de la broca pasa por el centro de la esfera. Calcular el volumen que se ha suprimido del encerrado por la esfera original.*

16. *Sea $f(x) = \sqrt{x^3}$ y T la región del plano limitada por las rectas $x = 0$, $x = 1$, el eje de abscisas y la gráfica de f. Calcular*
   a) *Área de T.*
   b) *Longitud del arco de curva determinado por f desde $x = 0$ hasta $x = 1$.*
   c) *Volumen del cuerpo engendrado por T al rotar alrededor del eje de abscisas.*
   d) *Volumen engendrado al girar en torno al eje OY.*

22. *Hallar el centro de gravedad de una pirámide cuadrangular de lado de la base l y altura h.*

23. *Hallar el centro de masas de una varilla cilíndrica de 10 cm de longitud, que tiene densidad $\rho(x) = (1 + x^2)$ g/cm^3, donde x es la distancia al extremo menos pesado de la varilla.*

24. *Hallar el momento de inercia de una placa delgada rectangular de base a y altura b, respecto a una de sus bases.*

25. *Hallar el momento de inercia de una placa rectangular de masa M y lados a y b, respecto a un eje perpendicular a dicha placa que pase por su centro. Supóngase que la placa es homogénea.*

BLIOGRAFÍA

García, A.; García, F.; López, A.; Rodríguez, G.; De La Villa, A.; ''*Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable*''. Clagsa 1993.