TEMA 1: Funciones elementales y números reales

José L. Díaz

Matemáticas I

Índice de contenidos

TEMA 1: Funciones elementales y números reales

1. **Gráficas**
   - La gráfica de una ecuación
   - Intersecciones de una gráfica con los ejes
   - Simetrías de una gráfica
   - Puntos de intersección

2. **Modelos lineales y velocidades de cambio**
   - La pendiente de una recta
   - Ecuaciones de las rectas

Índice de contenidos II

3. Funciones y sus gráficas

- Funciones y notación de funciones
- Dominio y rango de una función
- Gráfica de una función
- Transformaciones de funciones
- Clasificaciones y combinaciones de funciones

4. Cotas de un conjunto

- Supremo y máximo
- Ínfimo y mínimo

- **El plano coordenado (René Descartes, 1637) permite:**
  - Formular de manera analítica conceptos geométricos
  - Visualizar de forma gráfica conceptos algebraicos

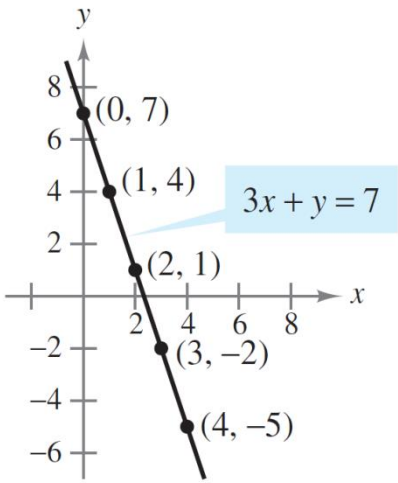
Realizar el cálculo desde múltiples perspectivas (analítica , numérica y gráfica) **incrementará la comprensión de los conceptos fundamentales**

Ejemplo:

Búsqueda de las soluciones **analítica , numérica y gráfica** de la ecuación $3x + y = 7$

$$y = 7 - 3x$$

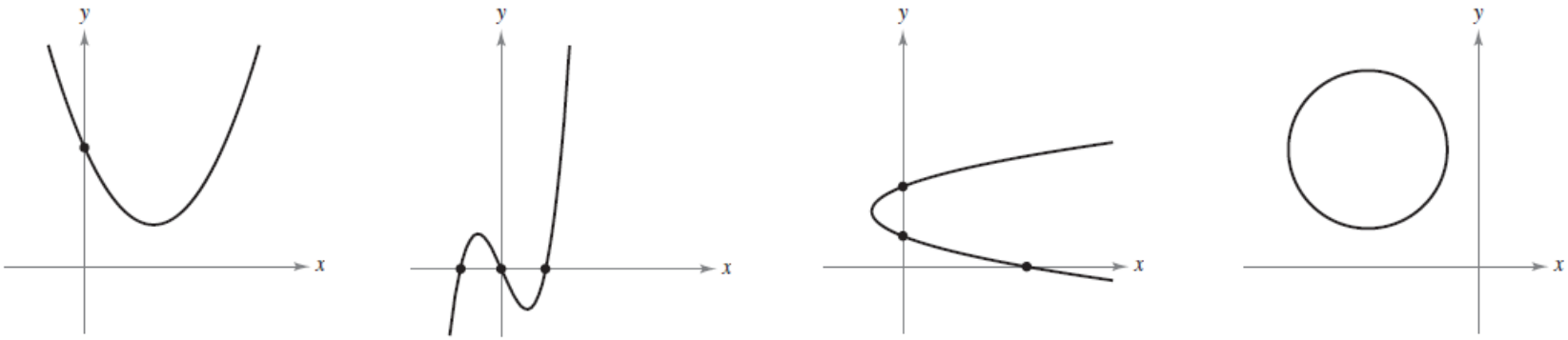
x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	-2	-5



- **Puntos útiles al representar gráficamente una ecuación:**
  - Intersección con el eje *x* → (a, 0) → igualar *y* = 0, despejar x de la ecuación resultante
  - Intersección con el eje *y* → (0, b) → igualar *x* = 0, despejar y de la ecuación resultante

NOTA: es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas

Ejemplos:



No hay intersecciones con el eje *x*
Una intersección con el eje *y*

Tres intersecciones con el eje *x*
Una intersección con el eje *y*

Una intersección con el eje *x*
Dos intersecciones con el eje *y*

No hay intersecciones

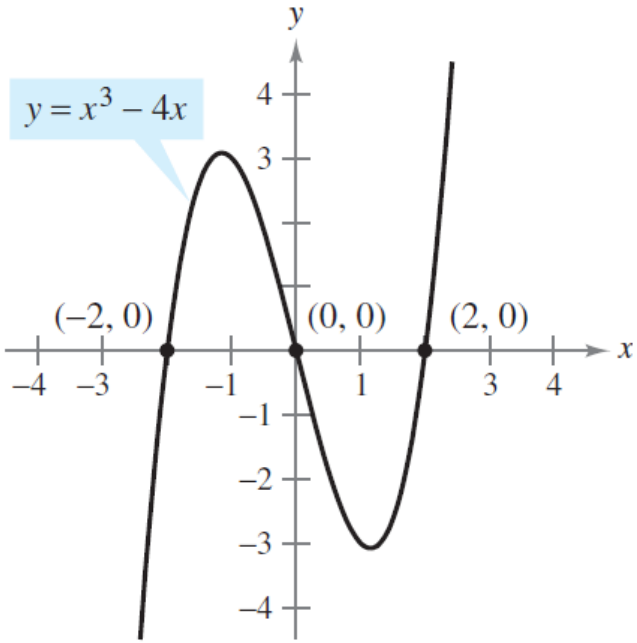
Ejemplo:

Determinar las intersecciones con los ejes *x* e *y* de la ecuación $y = x^3 - 4x$

- **Para determinar las intersecciones en *x:***
  - *y* se iguala a cero → $x^3 - 4x = 0$
  - Se factoriza la ecuación → $x(x-2)(x+2) = 0$
  - Se despeja *x* → $x = 0, 2 \text{ o } -2$

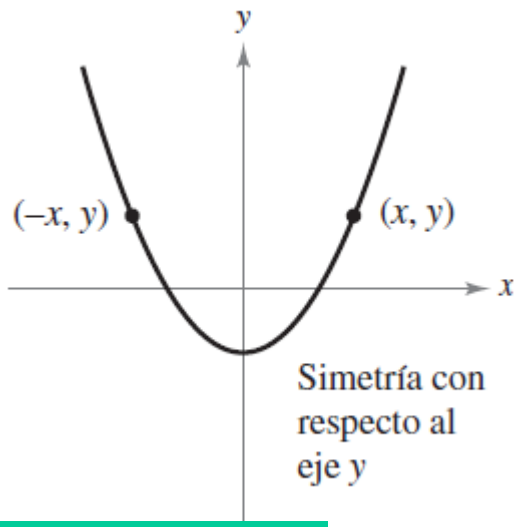
  NOTA: Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en x: (0, 0), (2, 0) y (-2, 0)

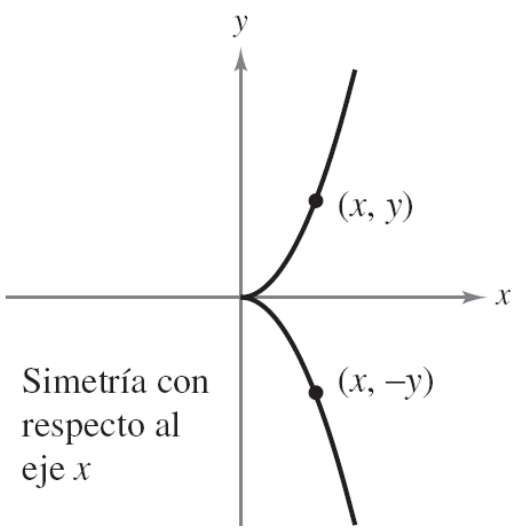
- **Para encontrar las intersecciones en y:**
  - *x* se iguala a cero → y = 0
  - Se despeja *x* → la intersección en y es: (0, 0)

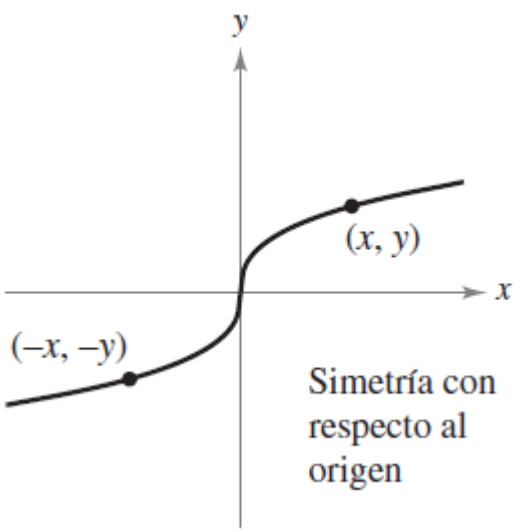


CRITERIOS DE SIMETRÍA

1. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.



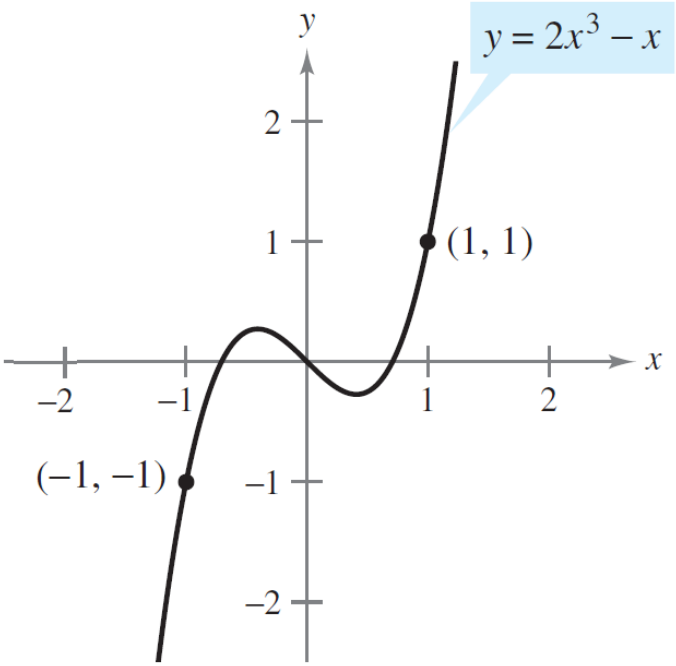




Ejemplo:

Verificar la simetría respecto al eje *y* y respecto al origen de la siguiente ecuación: $y = 2x^3 - x$

- **Simetría respecto al eje *y*:**
  - Escribir la ecuación original → $y = 2x^3 - x$
  - Sustituir *x* por – *x* → $y = 2(-x)^3 - (-x)$
  - Simplificar → $y = -2x^3 + x$
- **Simetría respecto al origen:**
  - Escribir la ecuación original → $y = 2x^3 - x$
  - Sustituir *x* por – *x* e *y* por – *y* → $-y = 2(-x)^3 - (-x)$
  - Simplificar → $-y = -2x^3 + x$ → $y = 2x^3 - x$



Simetría con respecto al origen

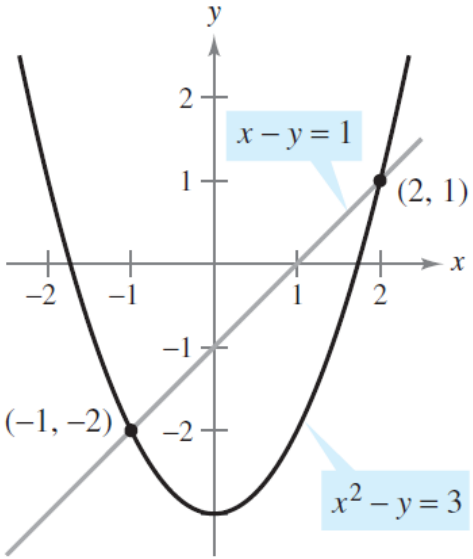
Definición: se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo **punto que satisface ambas ecuaciones**

Ejemplo:

Calcular los puntos de intersección de las siguientes gráficas: $x^2 - y = 3$ y $x - y = 1$

- Primero hay que **representar ambas gráficas** en el mismo sistema de coordenadas
- De la observación de la gráfica resulta evidente que existen dos **puntos de intersección → proceso para determinarlos:**

$y = x^2 - 3$	Despejar y de la primera ecuación.
$y = x - 1$	Despejar y de la segunda ecuación.
$x^2 - 3 = x - 1$	Igualar los valores obtenidos de y.
$x^2 - x - 2 = 0$	Escribir la ecuación en la forma general.
$(x - 2)(x + 1) = 0$	Factorizar.
$x = 2$ o -1	Despejar x.

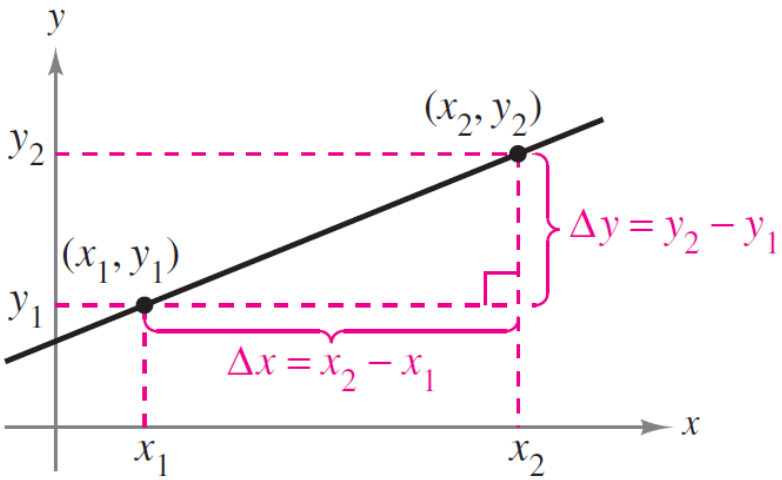


Definición:

La **pendiente** de una recta no vertical es una medida del número de **unidades que la recta asciende** (o desciende) **verticalmente por cada unidad de variación horizontal** (de izquierda a derecha)

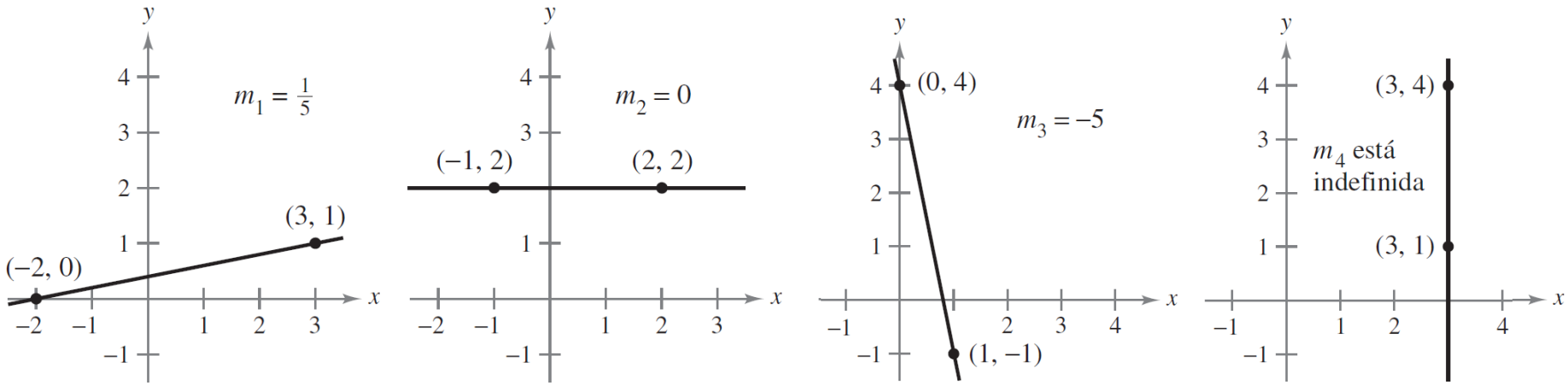
La **pendiente *m* de una recta** no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$



$\Delta y = y_2 - y_1 =$ cambio en y
$\Delta x = x_2 - x_1 =$ cambio en x

Ejemplos:



Si m es positiva, la recta sube de izquierda a derecha

Si m es cero, la recta es horizontal

Si m es negativa, la recta baja de izquierda a derecha

Si m es indefinida, la recta es vertical

NOTA: En general, **cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente** de una recta, **mayor es su inclinación**

Para calcular la pendiente de una recta pueden utilizarse **dos de sus puntos cualesquiera** → se puede **escribir la ecuación de una recta** si se conocen su **pendiente y uno de sus puntos**

La **ecuación de la recta** con **pendiente m** que pasa por el **punto (x_1, y_1)** está dada por:

ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE → $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo:

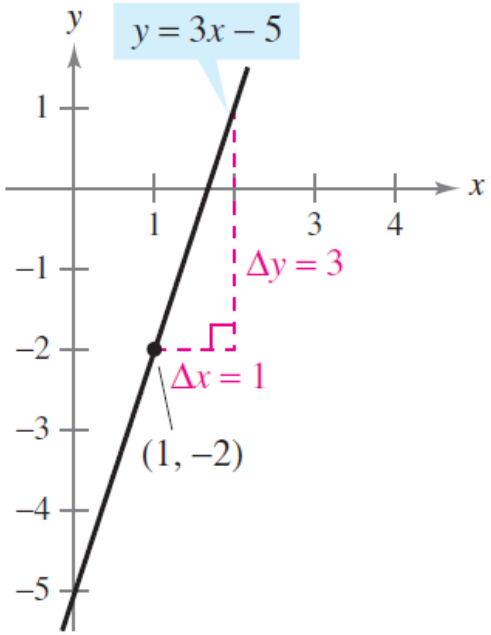
Encontrar la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, -2)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Forma punto-pendiente.}$$

$$y - (-2) = 3(x - 1) \quad \text{Sustituir } y_1 \text{ por } -2,\ x_1 \text{ por } 1 \text{ y } m \text{ por } 3.$$

$$y + 2 = 3x - 3 \quad \text{Simplificar.}$$

$$y = 3x - 5 \quad \text{Despejar } y.$$



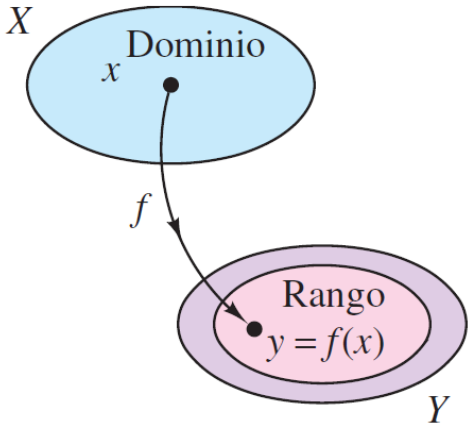
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x por f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se le llama el **valor de f en x**. El **recorrido o rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números de X.

NOTA:

- La variable ***x*** se denomina **variable independiente**
- La variable ***y*** se denomina **variable dependiente**



Ejemplo:

El área de un círculo (A) es una función de su radio (r) → $A = \pi r^2$

Modos de describir el dominio de una función:

- **Implícito:** Conjunto de todos los números reales para los que está definida la función
- **Explícito:** conjunto de números que se da junto con la función para los cuáles está definida

Algunos tipos de funciones…

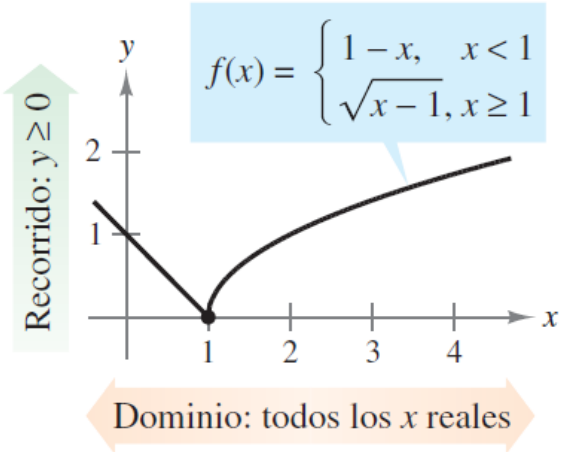
- **INYECTIVA:** una función de *X* a *Y* es inyectiva (uno a uno) si **a cada valor de *y*** perteneciente al rango **le corresponde exactamente un valor *x*** del dominio
- **SUPRAYECTIVA :** una función de *X* a *Y* es suprayectiva si **su rango** (o recorrido) **es todo *Y***

Ejemplo:

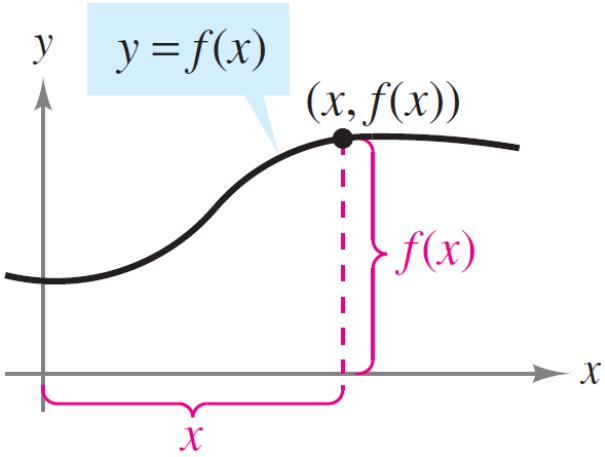
Determinar el dominio y el rango de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $[0, \infty)$



La gráfica de una función *y = f(x)* está formada por todos los **puntos (*x, f(x)*)**, **donde *x* pertenece al dominio de *f***

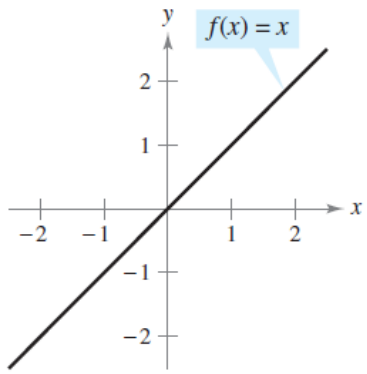


Gráfica de una función

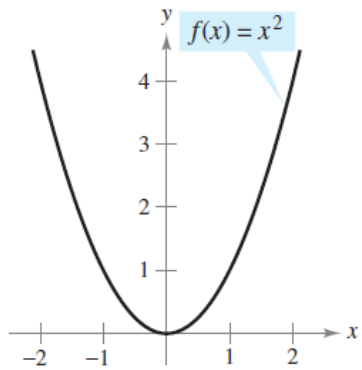
x = distancia dirigida desde el eje y
$f(x)$ = distancia dirigida desde el eje x

NOTA: una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x como máximo una vez → *CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL*

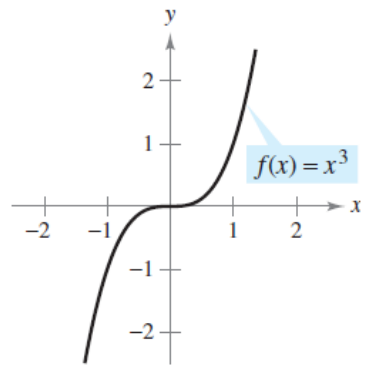
Ejemplo: gráficas de funciones básicas. Determina el dominio y el recorrido



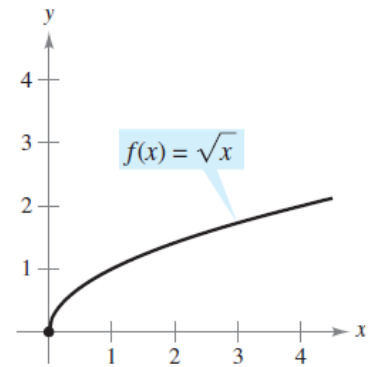
Función identidad



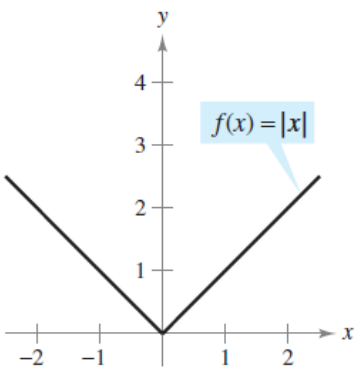
Función cuadrática



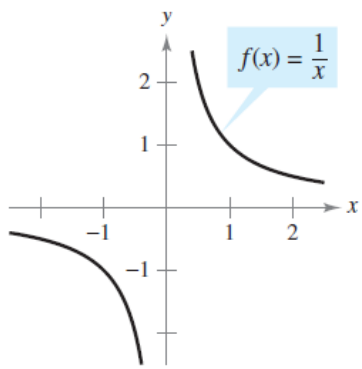
Función cúbica



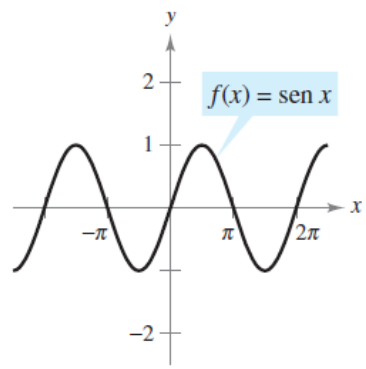
Función raíz cuadrada



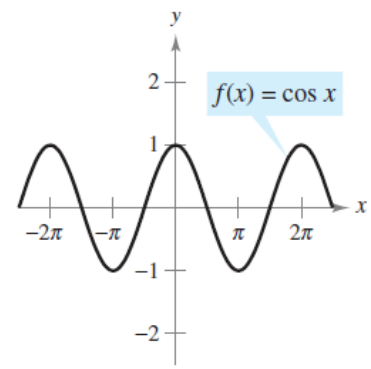
Función valor absoluto



Función racional

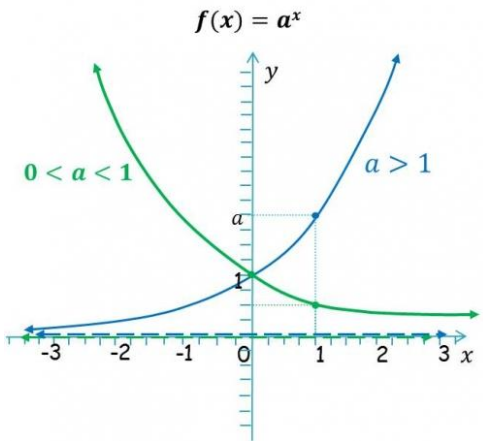


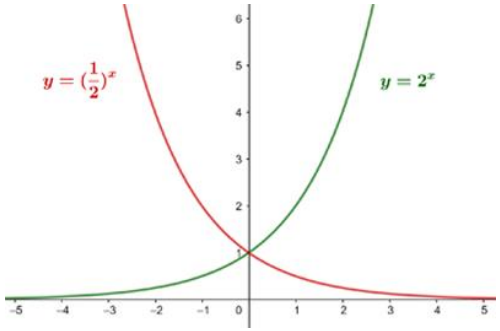
Función seno



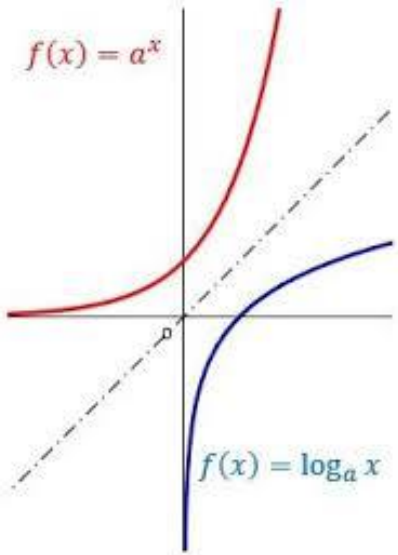
Función coseno

Ejemplo: Funciones exponencial y logarítmica. Determina el dominio y el recorrido





Expresión	¿Es función exponencial?
$f(x) = x^{3/4}$	No
$y = 3^x$	Si
$y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$	Si
$y = 9^{2x}$	Si
$y = 1^x$	No
$y = e^x$	Si, con base natural.
$f(x) = 10^x$	Si, con base decimal.



La función logaritmo es la inversa de la función exponencial. Ambas son crecientes, la función logarítmo decrece más lentamente que la exponencial a medida que x tiende a infinito.

Propiedades:

i) $\log_a 1 = 0$

ii) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^y = y \log_a x$$

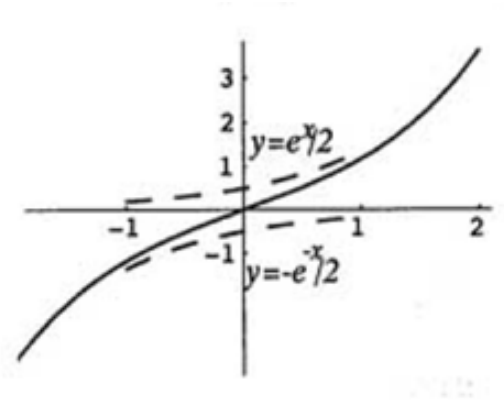
iii) Para $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$ se tiene $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

iv) Para $x, a, b \in \mathbb{R}$ se verifica $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ y $a^x = b^{x \log_b a}$. En particular, $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ y $a^x = e^{x \log a}$.

NOTA: *Nosotros usaremos fundamentalmente logaritmos neperianos, por lo que la notación $\log x$ indicará logaritmo en base e, es decir logaritmo neperiano, y cuando se utilice un logaritmo en otra base distinta, se indicará adecuadamente.*

- La función seno hiperbólico (senhx) se define como una combinación de funciones exponenciales*:*

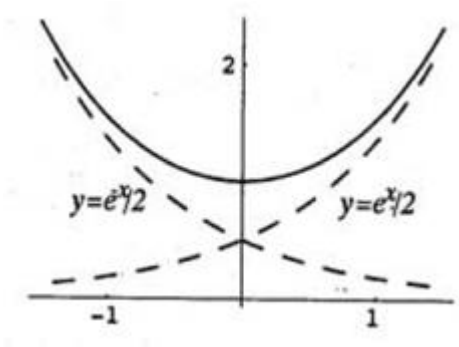
$$\boldsymbol{senh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$$



¿Cuáles son su dominio, recorrido y simetrías?

- La función seno hiperbólico (coshx) se define como una combinación de funciones exponenciales***:***

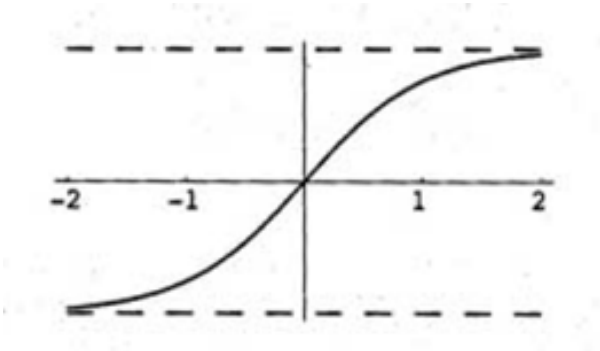
$$\boldsymbol{cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$



¿Cuáles son su dominio, recorrido y simetrías?

- La función tangente hiperbólica (tanhx) se define como una combinación de funciones exponenciales***:***

$$\boldsymbol{tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}}$$



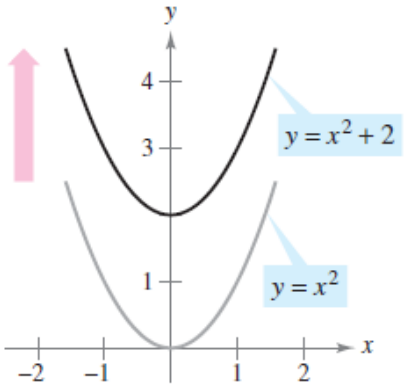
¿Cuáles son su dominio, recorrido y simetrías?

¿Está acotada? ¿Entre qué valores?

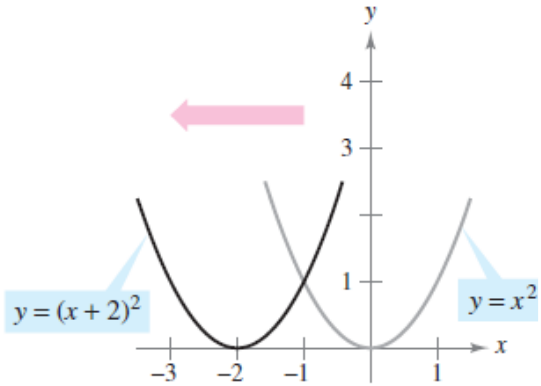
TIPOS BÁSICOS DE TRANSFORMACIONES ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la **derecha**:	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda**:	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades **hacia abajo**:	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades **hacia arriba**:	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$

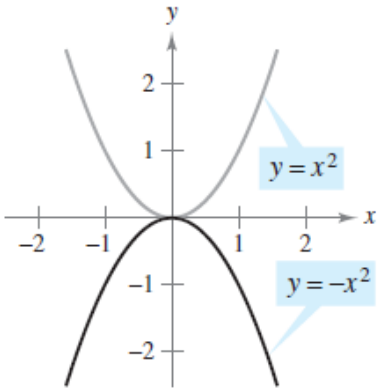
Ejemplo: comparación de la gráfica de $y = x^2$ con otras cuatro funciones cuadráticas



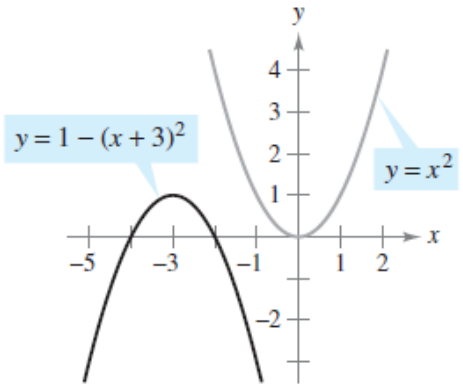
a) Traslación vertical (hacia arriba)



b) Traslación horizontal (a la izquierda)



c) Reflexión



d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Clasificación de funciones elementales:

- Algebraicas (polinómicas, radicales, racionales)
- Trigonométricas (seno, coseno, tangente…)
- Exponenciales y logarítmicas

} Funciones trascendentes

El tipo más común de función algebraica es la función polinomial:

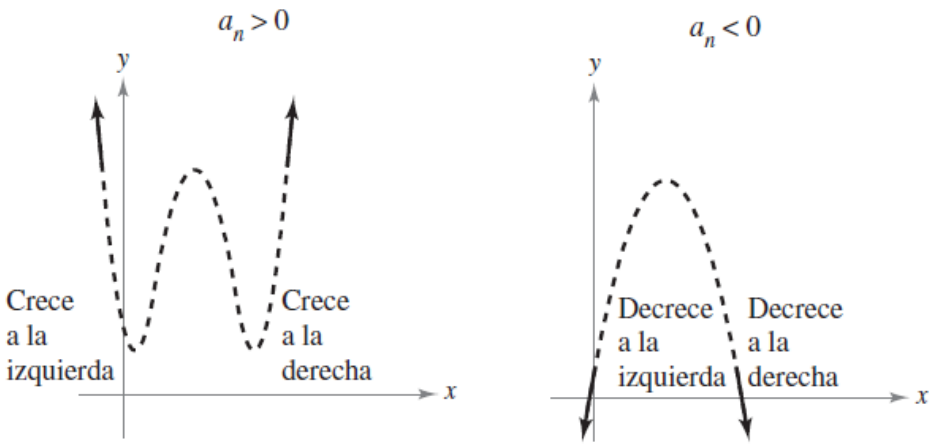
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde:

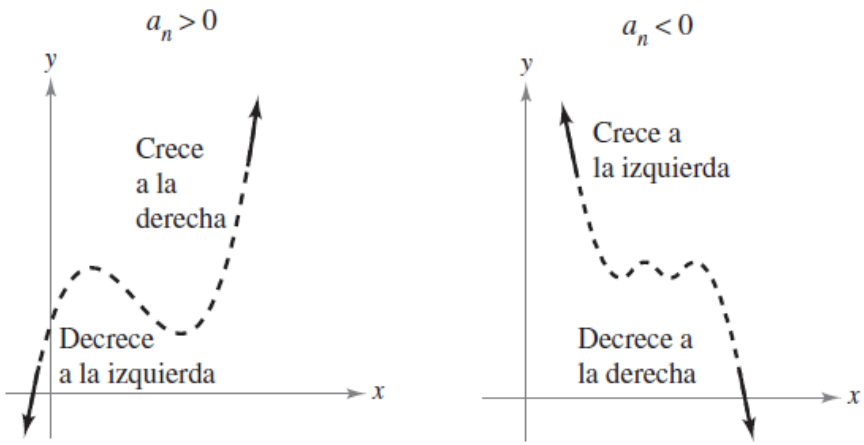
- n es un entero no negativo
- Las constantes a_i son coeficientes siendo a_n el coeficiente dominante y a_0 el término constante de la función polinomial

Prueba del coeficiente dominante para funciones polinomiales:

Determina el **comportamiento a la derecha y a la izquierda de una gráfica** a partir del **grado** de la función (par o impar) y del **coeficiente dominante** a_n



Gráficas de funciones polinomiales de grado par



Gráficas de funciones polinomiales de grado impar

Combinaciones de funciones:

1. Suma, diferencia, producto, cociente

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x-3) + (x^2+1)$$ Suma.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+1)$$ Diferencia.

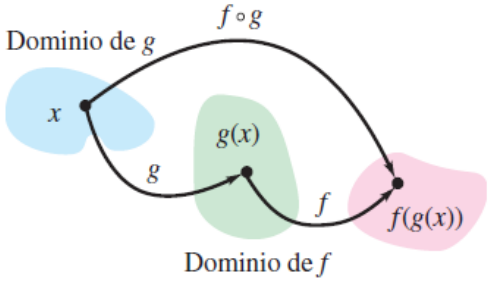
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x-3)(x^2+1)$$ Producto.

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-3}{x^2+1}$$ Cociente.

2. Composición → FUNCIÓN COMPUESTA

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN COMPUESTA

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función **compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f



Algunas definiciones…

- **Cero de *f*:**
  - La **intersección en *x*** de una gráfica es todo **punto (a, 0)** en el que la **gráfica corta al eje *x***
  - Si la **gráfica representa una función *f***, el número **a es un cero de *f*** (solución de la ecuación $f(x) = 0$)

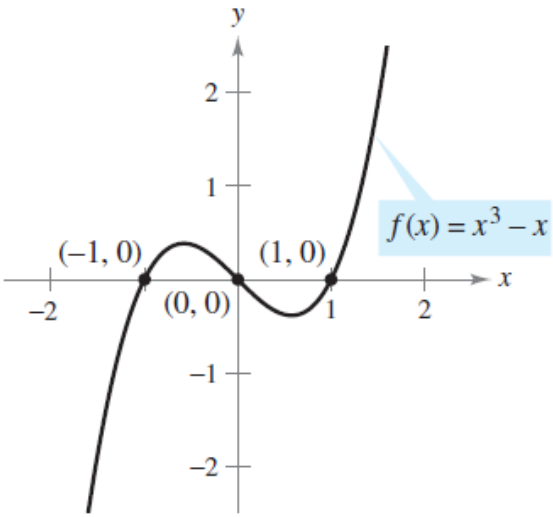
- **Funciones pares e impares:**
  - Una función es **par** si su gráfica **es simétrica respecto al eje *y***
  - Una función es **impar** si su gráfica es **simétrica respecto al origen**

PRUEBA PARA LAS FUNCIONES PARES E IMPARES
La función $y = f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$. La función $y = f(x)$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

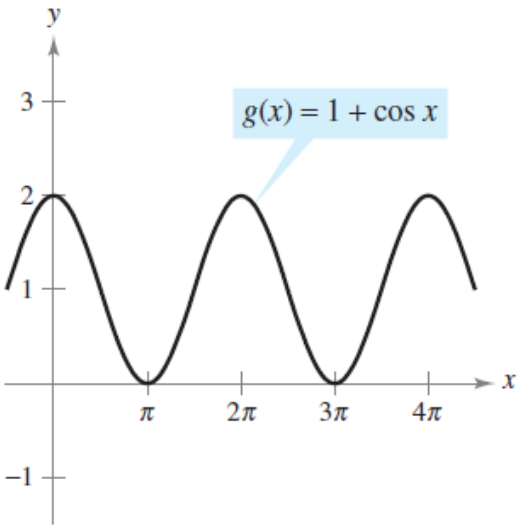
Ejemplo:

- Determinar si cada una de la siguientes funciones es par, impar o ninguna de ambas
- Calcular los ceros de la función

a) $f(x) = x^3 - x$ *b*) $g(x) = 1 + \cos x$



a) Función impar

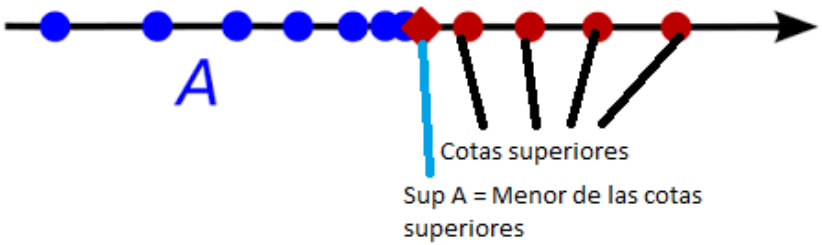


b) Función par

Cotas de un conjunto
Supremo y máximo

- En la definición del Dominio de una función, vimos que es posible definir intervalos abiertos y cerrados.

- El supremo de un conjunto se refiere a la menor de las cotas superiores de dicho conjunto, teniendo en cuenta que dicha cota superior no pertenece al conjunto.

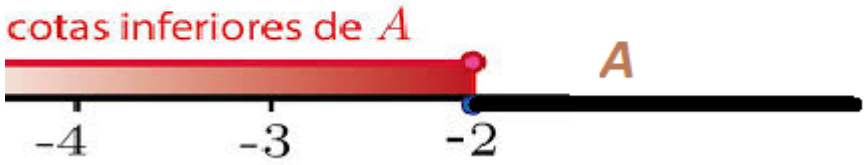


- Cuando la cota superior pertenece al conjunto, el supremo denomina máximo.

- El ejemplo clásico son los intervalos abiertos y cerrados:

  A = (4, 5) y B = (4, 5] **: Sup A = 5 pero no tiene máximo. Sup B = Max B = 5.**

- El ínfimo de un conjunto se refiere a la mayor de las cotas inferiores de dicho conjunto, teniendo en cuenta que dicha cota inferior no pertenece al conjunto.



- Cuando la cota inferior pertenece al conjunto, el ínfimo se denomina mínimo.
- El ejemplo clásico son los intervalos abiertos y cerrados:

  A = (4, 5) y B = [4, 5] **: Inf A = 4 pero no tiene mínimo. Inf B = Min B = 4.**