

1) Usar la definición de límite de una sucesión para establecer los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n} = 3$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n+5} = \infty$

2) Hallar, si existen, los siguientes límites:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, donde $a_1 > 0$ y $a_n = 1/(n e^{a_{n-1}})$ si $n \geq 2$.

3) Calcular los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^2 + 1}{9n^5 + 1}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + n^2} - n}{n^2 + \sqrt{n}}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 - 2n} \right)^{\frac{n^4 - 7}{2n^2}}$$

d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n-5}}{(n-10)^n}$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$$

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!}$$

4) Sea $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que las sucesiones $\{y_n\}$ y $\{\sqrt{n}y_n\}$ convergen.

5) Demostrar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - n = 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

- 6) Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$, si

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

- 7) Sea la sucesión recursiva $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = \frac{4}{25} \left(x_n^3 + \frac{9}{2} \right), \forall n > 1.$$

- a) Demostrar que $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1$.
- b) Demostrar que $\{x_n\}$ es convergente.
- c) Calcular su límite.

- 8) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_1 = 1$, y $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$. Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es contractiva y calcular su límite.

- 9) Sea la sucesión recursiva $\{x_n\}$ definida por:

$$0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{5} (x_n^3 + 2), \forall n > 1.$$

- a) Demostrar que $0 < x_n < 1, \forall n \geq 1$.
- b) Demostrar que $\{x_n\}$ es contractiva y calcular su límite.

- 10) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \quad \forall n > 1$$

- a) Demostrar que $0 < a_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- b) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona.
- c) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.
- d) Hallar el límite de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- e) Analizar que ocurre para todo $a_1 \in \mathbb{R}$.

- 11) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \quad \forall n \geq 1$$

- a) Demostrar que $a_n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$.
- b) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona.
- c) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Hallar su límite.
- d) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es contractiva.

- 12) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 2$$

- a) Demostrar que $a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 2$.
- b) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es contractiva.

c) Demostrar utilizando el apartado a) y la identidad $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1})$ que

$$a_n = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} \quad \forall n \geq 2.$$

d) Hallar el límite de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

13) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_1 = 1/2$ y $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + a_n}$ para $n \geq 1$.

1. Probar que $\{a_n\}$ es creciente.
2. Probar que $0 \leq a_n \leq 2$. Justificar porque $\{a_n\}$ converge.
3. Hallar el límite de la sucesión.
4. Si el límite de la sucesión es l . Probar que la serie $\sum_1^{\infty} (l - a_n)$ converge.

14) Sea la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = c > 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 \quad \forall n > 1$$

- a) Demostrar que $(1 - c)a_n \leq (1 - c)c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- b) Demostrar que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona.
- c) ¿Para que valores de c la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente?. En tales casos hallar el límite.
- d) Hallar, en función de c , el valor de a_2 y a_3 . Deducir y demostrar la expresión para el término general de la sucesión, a_n .
- e) ¿Para que valores de c la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente?

15) Analizar la convergencia de las series:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n} \quad \text{con } a > 1$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

16) Hallar la suma de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$$

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}$$

17) Si las series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, probar que también lo son:

a)

$$\sum \sqrt{a_n b_n}.$$

b)

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$