Primera convocatoria 23/06/2014

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define con precisión qué entendemos por la exponencial de una matriz cuadrada y enuncia sus principales propiedades. Sea A una matriz cuadrada de dimensión n, sea λ un valor propio de A de multiplicidad algebraica m, y sea v un vector propio generalizado de valor propio λ. A partir de las propiedades que has citado, probar que

$$\mathrm{e}^{tA}v = \mathrm{e}^{\lambda t}\left[v + t(A-\lambda)v + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda)^2 v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda)^{m-1}v\right]$$

indicando en cada paso qué propiedad usas y a quién la aplicas.

2.– Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hallar la exponencial de tA, por medio del cálculo de vectores propios generalizados. Mediante la transformada de Laplace, hallar la solución de $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1, 0, 0]$, donde $b(t) = [\mathrm{e}^t, 0, 0]$.

3.– Sabiendo que la solución general maximal $x = \psi(t, t_0, x_0, \mu)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ es diferenciable con respecto a todas sus variables, deducir el problema de valor inicial que satisfacen las derivadas parciales de ψ con respecto a μ.

4.– Determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$\dddot{y} + 2\,\mathrm{sen}(2\ddot{y}) + 6\mu\dot{y} + 5(\mathrm{e}^y - 1) = 0$$

en función de los valores del parámetro μ.

5.– Halla la solución de la ecuación de las órbitas y dibuja el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - x^2 - 2y \\ \dot{y} = 2x(y-1). \end{cases}$$

Cada ejercicio vale 2 puntos