Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Sea A una matriz cuadrada, real o compleja, de dimensión n. Probar que todos y cada uno de los valores propios de e^A son de la forma e^λ para λ un valor propio de A.

2.– Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde a es un parámetro real. Discutir, en función del valor de a, la estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$. Para $a = 1$, mediante vectores propios generalizados, hallar la exponencial de tA. Mediante la transformada de Laplace, hallar la solución de $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1, 0, 0]$, donde $b(t) = [\mathrm{e}^t, 0, 0]$.

3.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} - \frac{t}{t-1}\dot{y} + \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}\frac{t+1}{(t-1)^3},$$

cuya solución general maximal denotaremos por $y = \phi(t, t_0, y_0, \dot{y}_0)$. La solución con $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 1$ es

$$y = \phi(t, 0, -1, 1) = \frac{1}{t-1}.$$

Hallar las derivadas parciales de la solución general ϕ de la ecuación diferencial con respecto a las condiciones iniciales en el punto $(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = (t, 0, -1, 1)$.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = y - x^2. \end{cases}$$

1. Hallar los puntos de equilibrio, las nulclinas y dibujar el diagrama de fases.
2. Para cada uno de los puntos de equilibrio representar con precisión el diagrama de fases del sistema linealizado y clasificarlo.
3. Probar que la solución maximal del sistema anterior con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ tiene dominio $\mathbb{R}$ si y sólo si $|x_0| \leq 1$.

5.– Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo $\dot{x} = f(x)$, con f de clase C^1 en un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos que el origen es un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$, y que existen una constante positiva $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\langle x, Ax\rangle \leq -\alpha\langle x, x\rangle, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $A = Df(0)$. Demostrar que $0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Cada pregunta tiene un valor de 2 puntos