Examen Global. Segunda convocatoria 08/09/2017

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Sea A una matriz $n \times n$ (real o compleja) que tiene únicamente dos valores propios distintos, λ y μ, ambos semisimples. Demostrar que

$$\mathrm{e}^{tA} = \frac{\lambda \mathrm{e}^{\mu t} - \mu \mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda - \mu} I_n + \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\mu t}}{\lambda - \mu} A.$$

En caso de ser A real y sus valores propios complejos, dar una expresión real de la fórmula anterior.

2.– Halla la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + y \\ \ddot{y} = y + x. \end{cases}$$

que satisface $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

3.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

con μ un parámetro real.

1. Para $\mu > 0$ prueba que todas sus soluciones están definidas (al menos) en el intervalo $[0, +\infty)$.
2. Analiza la estabilidad del punto de equilibrio $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ en función de los valores del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $x = \phi(t, t_0, x_0, \dot{x}_0, \mu)$ denota la solución general maximal de dicha ecuación, halla la derivada parcial de ϕ con respecto a μ, y la derivada parcial de ϕ con respecto a $\dot{x}_0$, ambas en el punto $(t, t_0 = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \mu = 2)$. (Razona claramente cómo obtienes la matriz de la ecuación variacional)

Ayuda: Para la primera cuestión considera la derivada de la función $D(t) = x(t)^2 + \dot{x}(t)^2$.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = y - x^2. \end{cases}$$

1. Halla los puntos de equilibrio y clasifícalos. Halla las nulclinas y dibuja el diagrama de fases.
2. Probar que la solución maximal del sistema anterior con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ tiene dominio $\mathbb{R}$ si y sólo si $|x_0| \leq 1$.

**** Cada pregunta tiene un valor de 2.5 puntos**