

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.− Define con precisión qué entendemos por matriz resolvente de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$. Enuncia y demuestra sus principales propiedades. Halla, en función de la matriz resolvente, la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(t_0) = X_0$.

2.− Sea $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Supongamos que existen un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y una función continua $\ell(t)$ tales que

$$\langle f(t, y) - f(t, x), y - x \rangle \leq \ell(t) \langle y - x, y - x \rangle,$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \mathcal{D}$. Demostrar que todo problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, con $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, tiene solución localmente única a derechas. Ayuda: dadas dos soluciones, $x = \gamma(t)$ y $x = \eta(t)$, considérese la función $u(t) = \langle \gamma(t) - \eta(t), \gamma(t) - \eta(t) \rangle$.

3.− Consideremos la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + ay = 4e^{t-1}.$$

Halla la derivada parcial de la solución general maximal con respecto al parámetro a en el punto $(t, t_0, y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0, a) = (t, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Para $a = 1$ halla la solución que satisface $y(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 1$, $\ddot{y}(1) = 1$.

4.− Halla el dominio de la solución maximal del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 - 3z + \sin(t) \\ \dot{y} = y^2 \\ \dot{z} = z - e^y + x \end{cases}$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 3$.

5.− Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

1. Integra la ecuación de las órbitas y obtén las separatrices.
2. Representa el diagrama de fases, indicando claramente los elementos distinguidos.
3. ¿Cuántas órbitas contiene el eje x ? ¿Y el eje y ? ¿Para qué valores iniciales se obtienen órbitas periódicas?

Cada pregunta tiene un valor de 2 puntos