2. Sistemas homogéneos: obtención de soluciones

11.– Hallar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + z \\ \dot{z} = -y \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = 2y + z \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$$

12.– Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = x - y + z \\ x(0) = 3 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 2 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = x - y - z \\ x(0) = 4 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 4. \end{cases}$$

13.– Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales que satisfacen la parte real x e imaginaria y de la función compleja de variable real $z = x + iy$, si z satisface la ecuación diferencial lineal compleja $\dot{z} = (\alpha + i\omega)z$. Resolver dicho sistema y comparar con la solución de la ecuación compleja (obtenida en el tema anterior).

14.– Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que satisfacen las variables $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, si la función y satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea $\ddot{y}+\alpha\dot{y}+\beta y = 0$. Resolver dicho sistema y comparar con la solución obtenida en el tema anterior.

15.– Sea A una matriz real simétrica y sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal formada por vectores propios de A correspondientes a los valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Probar que la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = AX,\ X(0) = X_0$ se puede escribir en la forma

$$X(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\langle\, v_1, X_0\,\rangle v_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\langle\, v_2, X_0\,\rangle v_2 + \cdots + \mathrm{e}^{\lambda_n t}\langle\, v_n, X_0\,\rangle v_n.$$