

11. ECUACIONES ESCALARES AUTÓNOMAS

- 96.**— Estudiar la unicidad de la solución del problema de valor inicial $\dot{x} = |x|^s$, $x(0) = 0$ en términos del valor del parámetro $s > 0$. ¿En que casos se tiene solución única para el problema de valor inicial $\dot{x} = |x|^s$, $x(0) = x_0$, con $x_0 \neq 0$? Repetir el problema para la ecuación $\dot{x} = -\operatorname{sgn}(x)|x|^s$.
- 97.**— Para una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, estudiar la concavidad/convexidad de las soluciones en términos del signo de $f(x)$ y su derivada $f'(x)$. Para ello, recuerda que una función $x(t)$ es cóncava si $\ddot{x}(t) < 0$ y convexa si $\ddot{x} > 0$. Aplica tus resultados a la ecuación logística (problema 98).
- 98.**— La ecuación diferencial $\dot{x} = rx(1 - x)$ se denomina ecuación logística, y modela el crecimiento de ciertas poblaciones. En ella r es una constante que determina el ritmo inicial de crecimiento/decrecimiento de la población.
- Hallar los puntos de equilibrio y dibujar el diagrama de fases.
 - Determinar la procedencia y el destino de cada solución en términos de su condición inicial, así como la posible presencia de asíntotas.
 - Representar gráficamente, de manera aproximada, las soluciones.
 - Calcular exactamente dichas soluciones.
- Aunque físicamente no tiene sentido, estudiar también el caso $x < 0$.
- 99.**— El crecimiento de un tumor cancerígeno puede modelarse por la ley de Gompertz $\dot{x} = -ax \ln(bx)$, donde x es proporcional al número de células en el tumor, y a, b son constantes positivas. Dibujar el diagrama de fases y una gráfica aproximada de las soluciones para las distintas condiciones iniciales. Hallar la solución exacta. ¿Sabrías interpretar, en términos biológicos, el significado de las constantes a y b ?
- 100.**— Otra ecuación diferencial que se ha empleado para determinar el crecimiento de un tumor cancerígeno es $\dot{x} = ax^{2/3} - bx$, donde x es proporcional al número de células en el tumor, y a, b son constantes positivas. Dibujar el diagrama de fases y una gráfica aproximada de las soluciones para las distintas condiciones iniciales. Aunque físicamente no tiene sentido, considerar también el caso $x < 0$.