

13. EXISTENCIA Y UNICIDAD

117.— Para las siguientes funciones, halla una constante de Lipschitz o prueba que no existe.

1. $f(t, x) = |x|$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. $f(t, x) = tx^{1/3}$, $\mathcal{D} = [-10, 10] \times [-1, 1]$.
3. $f(t, x) = 1/(tx)$, $\mathcal{D} = [1, +\infty) \times [1, +\infty)$.
4. $f(t, x) = x \ln |x|$, si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.
5. $f(t, x, y) = xy/(1+x+y)$, $\mathcal{D} = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1/4\}$.

118.— Supongamos que f_1 y f_2 son funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en un conjunto $\mathcal{A}$ con constantes respectivas L_1 y L_2 . Si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ probar que la función $c_1 f_1 + c_2 f_2$ satisface también la condición de Lipschitz en $\mathcal{A}$ y hallar una constante de Lipschitz.

119.— Supongamos que $f: \mathcal{B} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ y $g: \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones que satisfacen la condición de Lipschitz en sus respectivos dominios. Estudiar si la función $\varphi: \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida mediante ‘composición’ $\varphi: x \mapsto f(t, g(t, x))$ satisface también la condición de Lipschitz.

120.— Resolver los siguientes problemas de valor inicial determinando el intervalo maximal de existencia de la solución:

1. $\dot{x} = \frac{2t}{x + t^2 x}$, $x(2) = 3$
2. $\dot{x} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(x - 1)}$, $x(0) = -1$
3. $\dot{x} = x^2 - 2x$, $x(0) = 1$.

121.— Sea $\mathcal{D}$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sean $f, F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$f(t, x) < F(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{D}.$$

Sea $x = \gamma(t)$ una solución de $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, y sea $x = \Gamma(t)$ una solución de $\dot{x} = F(t, x)$, $x(t_0) = X_0$, ambas definidas en el mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Probar que si $x_0 < X_0$ entonces $\gamma(t) < \Gamma(t)$ para todo $t \geq t_0$, $t \in I$.

Ayuda: razonar, por reducción al absurdo, sobre el primer tiempo en el que las dos soluciones son iguales.

122.— Estudiar la existencia y unicidad de solución para los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{x} = |x| + x^2 - 3t^2$, $x(t_0) = x_0$.

2. $\dot{x} = g(x) + e^t/(t^2 + 1)$, $x(t_0) = x_0$, siendo

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \geq 0 \\ 1 & x < 0. \end{cases}$$

123.— Demostrar que si los grafos de dos soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ (con f continua y satisfaciendo la condición de Lipschitz local) se cortan en algún punto, entonces dichas soluciones son iguales en la intersección de sus dominios. Recordar que el grafo de una función $f: A \rightarrow B$ es el conjunto $\text{Gr}(f) = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.

124.— Probar que todo problema de valor inicial para la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos(tx^2)$ tiene una única solución, y que ésta está definida en toda la recta real.

125.— Sea $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en el abierto $\mathcal{D}$. Demostrar que si existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y una función continua $\ell(t)$ tales que

$$\langle f(t, y) - f(t, x), y - x \rangle \leq \ell(t) \langle y - x, y - x \rangle,$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \mathcal{D}$, entonces todo problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, con $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, tiene solución única a derechas. Ayuda: dadas dos soluciones, $x = \gamma(t)$ y $x = \eta(t)$, considerar la función $\langle \gamma(t) - \eta(t), \gamma(t) - \eta(t) \rangle$.

126.— Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x - 9 & x \in (-\infty, -1] \\ x(9 - x^2) & x \in (-1, 1) \\ -x + 9 & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Demostrar que, para todos los $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución, y que está definida en todo $\mathbb{R}$.

127.— Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = 3|x| \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x}y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Halla su solución y comprueba que está definida en toda la recta real.

128.— La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = \operatorname{sen}(x) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

¿está definida en todo $\mathbb{R}$?

129.— Analizar si el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = \max\{t, x\} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene solución única, y si está definida en todo $\mathbb{R}$.

Ayuda: considerar la función $\varphi(t, x) = (t + x) + |t - x|$.

130.— Sea $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua satisfaciendo la condición de Lipschitz local y sea $A: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}$ una función continua. Probar que, para cada $(t_0, x_0, v_0) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ \dot{v} = A(t, x)v \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

tiene una única solución. Encontrar el intervalo maximal de la solución de este problema en términos del intervalo maximal de la solución del problema $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

131.— Hallar el intervalo maximal de definición de la solución del problema

$$\begin{cases} \ddot{y} + y \cos(y) - \ln t = 0 \\ y(1) = 1 \\ \dot{y}(1) = 2 \\ \ddot{y}(1) = 3. \end{cases}$$

132.— Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y sea $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que todo punto de $\mathcal{D}$ tiene un entorno tal que

$$|g(t, z_1, z_2) - g(t, x_1, x_2)| \leq L \max\{|z_1 - x_1|, |z_2 - x_2|\},$$

para cierta constante $L > 0$ y para toda pareja de puntos (t, x_1, x_2) , (t, z_1, z_2) en dicho entorno. Demostrar que para cada $(t_0, y_0, v_0) \in \mathcal{D}$,

existe un único intervalo abierto $J_{t_0, y_0, v_0} \subset \mathbb{R}$ y una única solución $y = \gamma_{t_0, x_0, v_0}(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} = g(t, y, \dot{y}) \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = v_0, \end{cases}$$

definida en dicho intervalo, tal que si $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}$ es otra solución de dicho problema, entonces $I \subset J_{t_0, y_0, v_0}$ y $\eta(t) = \gamma_{t_0, y_0, v_0}(t)$ para todo $t \in I$.

133.— Probar que toda solución de la ecuación diferencial de un péndulo con rozamiento

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0,$$

(todos los parámetros m, l, g, b son positivos) está definida en todo $\mathbb{R}$.

134.— Probar que toda solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

con $\mu > 0$, está definida (al menos) en $[0, +\infty)$.

Ayuda: Convertir a sistema de primer orden con las variables $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, y considerar la derivada de $D(t) = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ (i.e. de la distancia al origen elevada al cuadrado).